ISSN 0130-2221

МАРТ/АПРЕЛЬ 2004 · №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КВАНТ

МАРТ АПРЕЛЬ 2004 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

В 2004 году 6000 экземпляров журнала «Квант» издаются за счет гранта Фонда некоммерческих программ «Династия».

Бюро Квантум

Удивление, понимание, восхищение

М.КАГАНОВ

Стройный мост из железа ажурного,
Застекленный осколками неба лазурного.
Попробуй вынь его
Из неба синего –
Станет голо и пусто.
Это и есть искусство.

Д.Самойлов

Можно восхититься мостом так, как это сделал поэт. Инженер восхищался бы иначе. Он рассказал бы, и не только своим коллегам по профессии, чем восхищающий его мост отличается от других мостов. Скорее всего, не удержался бы и сообщил некоторые конкретные данные.

Много раз в сопровождении профессионалов-экскурсоводов я ходил по музеям, осматривал архитектурные достопримечательности. Одни экскурсоводы многословны – они сообщают множество интересных данных и фактов; другие лишь изредка указывают на что-то, что нельзя пропустить, и иногда бросают отрывочные

Иллюстрация П. Чернуского

фразы. Как правило, я получал большее впечатление от увиденного, когда экскурсовод был немногословен.

Сравнительно недавно ушел в историю XX век. Конечно, он принес много бед и несчастий. Но останется в памяти он не только этим. За ушедший век необычайно расширились границы познанного, что вызывает у меня глубокое восхищение. Именно восхищением я и хочу поделиться с читателями. (Об ужасах и несчастьях, поверьте, я тоже не забываю.)

Если я покажусь многословным, то простите: искренне хотел избежать ненужных подробностей, но очень трудно оценить, где кончается «нужное» и начинается «ненужное». Я не чувствую себя опытным экскурсоводом, скорее – инженером, влюбленным в конструкцию.

* * *

Из описания путешествия английского мореплавателя Джеймса Кука известно, что жители Новой Зеландии не удивились, когда к их берегам подошли никогда не виданные ими корабли. Не имея привычки объяснять, они все воспринимали как должное.

К концу XIX века казалось, что вот-вот будет понято, как устроен окружающий нас мир. Механика Ньютона и электродинамика Фарадея – Максвелла объяснили почти все. Термодинамика установила строгие границы возможного. Наука перестала быть забавой, удовлетворением любопытства кучки чудаков, не интересующихся жизненно важными для людей вопросами, а занятых непонятно чем. Выяснилось, что полученные учеными результаты могут помочь использовать силы природы и заставить их работать на человека. Стало очевидно, что созданные машины будут совершенствоваться, изменяя жизнь людей.

Почти не выходя за пределы реальных знаний, Жюль Верн – один из создателей столь популярного ныне жанра научной фантастики – сочинял увлекательные сказки, в которых ярко описывались замечательные достижения инженерной мысли. Конечно, не все романы Жюля Верна я помню – в детстве они «проглатывались» мною один за другим, но позже я их не перечитывал. Мне кажется, вся фантазия Жюля Верна тратилась на инженерные свершения. Не предполагал он, что в том будущем, в котором действуют его герои, наши знания претерпят весьма существенные изменения.

Большинство профессионалов-ученых на границе XIX и XX веков считали, что физическое описание мироустройства близко к завершению, осталось уточнить значения ряда физических величин и ... все. Мало кого заботило, например, что в рамках существующей науки почему-то не удается описать излучение *абсолютно черного тела.* Далекие от науки люди не знали, как впрочем не знают и сейчас, что такое абсолютно черное тело. Но, думаю, и многим физикам тоже были неведомы загадки этого объекта.

Что же такое абсолютно черное тело? Формально, абсолютно черным телом принято называть тело, которое поглощает световые лучи, но не отражает их. Может ли существовать такое тело? Строго говоря, нет: всякое тело какую-то часть света поглощает, какую-то отражает. Но можно искуственно создать почти абсолютно черное тело (лучше было бы сказать, почти абсолютно черную поверхность). Для этого в массивном твердом теле делают полость и связывают ее с внешним миром очень маленьким отверстием. Чем отверстие меньше, тем точнее и лучше модель приближается к своему «оригиналу». Действительно, вероятность того, что лучи света, попав внутрь полости через отверстие, выйдут наружу, очень мала – лучи поглощаются отверстием, но не отражаются.

Тело, в котором есть полость внутри, имеет определенную температуру. Эту температуру можно изменять и исследовать, как с изменением температуры изменяется характер излучения из отверстия, которое моделирует абсолютно черное тело. Все было бы просто, если бы теоретическая физика умела предсказать результат, а экспериментаторы подтвердили бы его. Кое-какие предсказания тогда (на границе веков) делались, но порой приводили к неприемлемым последствиям. Например, предсказывалось, что при любой температуре абсолютно черное тело должно излучать бесконечное количество энергии. Это предсказание получило даже специальное название – *ультрафиолетовая катастрофа.* Дело в том, что согласно теории тех лет излученная энергия растет с ростом частоты света.

Понимаю, у многих даже сейчас может возникнуть недоумение: «Страшное дело! Не могут объяснить, как излучает энергию какая-то дырочка. Сколько пользы уже принесла наука, какие возможности впереди, а нас пугают ультрафиолетовой катастрофой, будто она может кому-то навредить». Думаю, так или похоже рассуждали многие, и отнюдь не только далекие от физики люди на рубеже XX века. А мне не дают покоя строки Анны Ахматовой из «Поэмы без героя»:

Приближался не календарный –
Настоящий Двадцатый век.

Ведь именно в 1900 году Макс Планк осознал, что согласовать наблюдения излучения абсолютно черного тела с теорией можно, только если предположить, что атомы твердого тела не подчиняются законам ньютоновской механики, той самой механики, которая столько объяснила, которая принесла и несомненно принесет бесконечно много пользы.

По Планку (в откровенном противоречии с классической механикой), энергия колеблющегося атома может принимать только целочисленные значения – кванты энергии. Событие, находящееся, казалось бы, на периферии науки своего времени, примерно через четверть века научная общественность назовет революционным переворотом. Оно ознаменовало рождение новой, *квантовой физики.*

Многие активные молодые физики того времени с энтузиазмом посвятили свой талант новой науке. Что двигало ими? Не будем гадать. Приведу цитату из статьи Альберта Эйнштейна «Мотивы научного исследования»[1], посвященной Максу Планку: «Храм науки

---

[1] *Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том IV. (М.: Наука, 1967.)*

– строение многосложное. Различны пребывающие в нем люди и приведшие их туда духовные силы. Некоторые занимаются наукой с гордым чувством своего интеллектуального превосходства; для них наука является тем подходящим спортом, который должен им дать полноту жизни и удовлетворение честолюбия. Можно найти в храме и других: плоды своей мысли они приносят здесь в жертву только в утилитарных целях. Если бы посланный богом ангел пришел в храм и изгнал из него тех, кто принадлежит к этим двум категориям, то храм катастрофически опустел бы. Все-таки кое-кто из людей как прошлого, так и нашего времени в нем бы остался. К числу таких людей принадлежит наш Планк, и поэтому мы его любим».

Продолжу цитирование. С трудом заставляю себя делать купюры. Очень советую прочесть статью целиком. «...Но обратим вновь свой взгляд на тех, кто удостоился милости ангела... Что привело их в храм?» Эйнштейн считает, что важную роль для них играет «желание уйти от будничной жизни с ее мучительной жестокостью и безутешной пустотой, уйти от уз вечно меняющихся собственных прихотей». Не будем спорить с гением: несомненно, он делится своими сокровенными мыслями и чувствами. «Но к этой негативной причине, – пишет Эйнштейн через несколько строк, – добавляется и позитивная. Человек стремится каким-то адекватным способом создать в себе простую и ясную картину мира...»

Созданием картины мира заняты не только ученые, но и художники, поэты, музыканты, философы. «Какое место занимает картина мира физиков-теоретиков среди всех возможных таких картин? Благодаря использованию языка математики эта картина удовлетворяет наиболее высоким требованиям в отношении строгости и точности выражения взаимозависимостей. Но зато физик вынужден сильнее ограничивать свой предмет, довольствуясь изображением наиболее простых ...явлений...» Ограничение заставляет добавить сомнение: «Высшая аккуратность, ясность и уверенность – за счет полноты... Заслуживает ли результат столь скромного занятия гордого названия «картины мира»?»

Ответ Эйнштейна вполне определенный: «Я думаю – да, ибо общие положения, лежащие в основе мысленных построений теоретической физики, претендуют быть действительными для всех происходящих в природе событий. Путем чисто логической дедукции из них можно было бы вывести картину, т.е. теорию всех явлений природы, включая жизнь». За этим следует оговорка: «если этот процесс дедукции не выходил бы далеко за пределы творческой возможности человеческого мышления».

Важное место в статье Эйнштейна занимает вопрос о роли интуиции при создании адекватной картины мира. Приведу только одну фразу, которую считаю очень важной для понимания природы познания: «К этим законам ведет не логический путь, а только основанная на проникновении в суть опыта интуиция».

Как показывает развитие науки, пределы возможности человеческого мышления фантастически расширяются. И все же мы не можем ответить однозначно, будет или нет построена теория всех явлений природы, включая жизнь. Мне кажется, что процесс познания будет длиться столько, сколько будет существовать человеческая цивилизация. К сожалению, нетрудно представить себе трагический исход так нами почитаемого прогресса.

Высказанное высоким стилем изложим значительно более прозаически.

Из огромного количества фактов, которые к концу XIX века не были поняты, Макс Планк выбрал один – излучение абсолютно черного тела. Он попытался найти объяснение в рамках классической физики, не сумел и пришел к выводу: не всегда возможно пользоваться законами классической физики. Физика Ньютона и Фарадея–Максвелла получила эпитет «классическая» после того, как возникла и развилась новая, квантовая физика. На рубеже XIX и XX веков это была *вся* физика, которая, повторюсь, себя прекрасно оправдала.

Несомненно, все началось с *удивления*: почему не удается в классических терминах описать излучение черного тела? Я же призываю к *восхищению* – сколь своевременно была высказана Планком «крамольная» идея.

Эрнест Резерфорд выяснил, что почти вся масса атома сосредоточена в его ядре, возникло представление об атоме как о планетарной системе: ядро – солнце, электроны – планеты. Нильс Бор понял, что, не привлекая идею Планка о квантах, объяснить устойчивость атомов невозможно. Созданная Бором теория атома водорода эклектична: к хорошо известным законам движения механики Ньютона произвольно были добавлены квантовые условия, и формула водородного спектра правильно описала экспериментальные факты.

Победителей не судят, но какой ценой получен результат! По сути, разрушена строгая логика всей физики. Естественно, начались поиски выхода из создавшегося положения.

Сейчас, когда курс квантовой механики входит в стандартный набор предметов, изучаемых большинством молодых людей, получающих высшее техническое и естественно-научное образование, очень трудно себе представить, какого не только интеллектуального, но и эмоционального напряжения стоило создание основ новой физики.

В одной из книг Даниила Данина описан такой эпизод. Вернер Гейзенберг, тогда молодой ученый, обсуждал с Нильсом Бором логические трудности новой физики. Обсуждение продолжалось долго. Обоим казалось, что выхода нет. Бор пришел к выводу, что обсуждение надо на время прекратить, и, не предупредив своего молодого коллегу, уехал, устроив себе каникулы. Когда Гейзенберг узнал, что учитель его покинул, он расплакался (!). Итог эпизода замечателен: Бор вернулся после каникул с *принципом дополнительности*, а Гейзенберг в отсутствие Бора вывел *соотношение неопределенностей*. Эти результаты абсолютно необходимы для логики квантовой механики.

Квантовую механику, несомненно, надо считать важной составляющей того, что Эйнштейн назвал простой и ясной картиной мира. Конечно, нельзя считать, что с ее помощью объяснены все явления природы. Можно свое внимание сосредоточивать на том, что не объяснено. Так поступают профессионалы. Но не только. Много людей, далеких от физики, ощущают окружающий мир полным загадок и тайн. И они правы. Действительно, почти на каждом шагу можно столкнуться с явлением или событием, объяснение которого либо нам неизвестно, либо неизвестно вообще – даже тем, кто по своей профессии мог бы знать объяснение, если бы оно было. Те, кто смотрит на науку о мире как бы со стороны, из подобных наблюдений нередко делают неверный вывод о принципиальном бессилии науки.

Другая крайность – преувеличение возможностей науки. Есть люди, которые считают, что наука может все. Естественно, такой взгляд на науку тоже неправилен. Сошлюсь на высказывание одного из творцов новой физики Эрвина Шредингера: «Наука ни слова не может сказать нам о том, почему нас радует музыка, почему и как старая песня может вызвать у нас слезы. Мы полагаем, что наука может в принципе описать... Но о чувстве радости и сожаления, которые сопровождают процесс [познания], науке ничего неизвестно, поэтому она о них умалчивает». В этой цитате важны слова: «наука может в принципе описать». Наука всегда *описывает*. Правильней только было бы уточнить: «естественные науки могут в принципе описать».

Но не будем останавливаться на крайних точках зрения.

Три слова, поставленные в заглавие статьи, можно располагать по-разному. От этого может несколько измениться смысл. Пусть, например, это будет: *удивление – восхищение – понимание*. Удивившись и восхитившись увиденным, ученый постигает природу явления и, по словам Эйнштейна, превращает чудо в тривиальность. Принятый же в заглавии порядок слов: *удивление – понимание – восхищение* означает нечто другое. А именно:

- *Удивление* невозможностью объяснить наблюдаемое явление заставило ученого выйти за пределы принятой теории.
- Последовало создание новой теории. Возникло *понимание*, охватившее множество фактов и явлений.
- Новая картина мира вызывает истинное *восхищение*. Восхищение распространяется и на ученых, которые буквально ежедневно расширяют область познанного.

Поделиться восхищением очень трудно. Ни восклицательные знаки, ни охи, ни ахи не помогут. Расскажу, что восхищает *меня*.

Недавно я написал статью под названием «Из чего все состоит» (она опубликована в трех номерах журнала «Наука и жизнь»: № 10,11,12 за 2003 год). В статье рассказано, как из частиц трех типов – электронов, протонов, нейтронов – построены атомы, молекулы, твердые тела, т.е. все, что составляет окружающий нас мир, включая и нас самих. Статья заканчивается следующими словами: «Восхищение и объяснение плохо уживаются. Объяснив, как бы ликвидируешь восхищение. Очень хочется, чтобы, поняв в общих чертах принципы устройства всего на свете, вы не потеряли способность восхищаться тем, что для создания всего этого баснословного разнообразия достаточно лишь трех типов частиц – электронов, протонов и нейтронов. "Подумаешь, – скажет скептик, – с помощью двух значков (нуля и единицы) можно закодировать любой текст: скучную инструкцию и прекрасную поэму." Правильно! Но текст, а также любое устройство кто-то создал. Когда кто-то создает уникальную машину или гениальную поэму, он, несомненно, заслуживает восхищения. Но восхищение вызывает и природа, естественным путем создавшая бесконечное многообразие из электронов, протонов и нейтронов».

Добавим к этому, что *естественный путь* удивительно однообразен. Нет сомнений, что «правила сборки», которыми пользуется природа на Земле и в удаленных, но доступных для наблюдения частях Вселенной, одни и те же. «Доступная для наблюдения часть Вселенной» – звучит очень буднично. Но она занимает сферу, у которой радиус порядка 10^{10} световых лет, т.е. свет от границы доступной для наблюдения области Вселенной движется к наблюдателю 10^{10} лет. И доступная для наблюдения часть Вселенной наполнена многими миллиардами галактик – многомиллиардными скоплениями звезд.

Хотелось бы эту непредставимо огромную сферу назвать terra cognita – познанной землей, в отличие от terra incognita – непознанной земли. Конечно, в этом есть заведомое преувеличение: мир полн тайн. Но необходимо подчеркнуть следующие два обстоятельства.

1) Своеобразную расчлененность мира. Мир устроен так, что можно исследовать и постигать его по частям. Не будь этого, мир был бы совершенно непознаваем.

2) Основываясь на объективно существующей расчлененности мира, естественные науки выработали у ученых своеобразное профессиональное чутье. Специалист знает, что принадлежит его «ведомству», а что нет.

История науки знает знаменательные «агрессии». Сначала химики, а потом физики занялись биологией. Их вмешательство принесло грандиозные плоды: помогло далеко продвинуть понимание проблем деятельности и развития живых организмов – вплоть до атомно-молекулярного уровня. Менее известно, что только вмешательство в космологию специалистов по микрофизике (по физике элементарных частиц) позволило поставить вопрос о развитии Вселенной и получить обнадеживающие ответы, дающие надежду выяснить, как развивалась Вселенная от момента Большого взрыва до наших дней.

Попытки определить наиболее впечатляющие достижения науки обычно носят конкретный характер – радио, электричество, атомная энергия... Все это, действительно, достойно восхищения. Но меня более всего восхищает в науке ее *методология*. Каждая из наук разработала жесткие правила обращения с объектом исследования. Правила эти очень разнообразны, но у них есть общие черты. Одно из основных требований – объективность. Когда речь идет об эксперименте или о выводе формулы, наука неукоснительно требует повторяемости, возможности независимой проверки. Именно научная методология вызывает особое уважение. Даже лженаука, выдавая себя за науку, пользуется научной терминологией, пытаясь подчеркнуть свою объективность и надежность используемых ею методов.

Вернемся мысленно в необозримо огромную область, которую я назвал «познанной землей». Предположим, мы создали модель – нечто вроде глобуса с нанесенными на нем «значками», изображающими объекты окружающего нас мира. Пусть цвет объекта зависит от степени понимания природы этого объекта. Тогда «глобус» менял бы свою окраску все время: непрерывно появлялись бы новые «значки», а уже имеющиеся меняли бы свой цвет. Научные знания об окружающем нас мире постоянно совершенствуются, углубляются. Загадочное явление неожиданно получает подробное описание, открываются его новые, неизвестные ранее черты, оно входит в научный обиход, часто тянет за собой новые открытия.

Наука – одна из наиболее динамичных областей человеческой деятельности. При этом для науки характерен строгий отбор: она не «набрасывается» на любую тайну. Наука, как правило, ставит перед собой задачи, которые может решить. Существует *определенная логика развития науки*: то, что вчера было вне науки из-за недоступности, сегодня – на повестке дня. Недоступность отнюдь не всегда следствие неподготовленности инструментария научного познания. Чаще недоступность означает неподготовленность мировоззрения ученых к постановке соответствующей задачи. Одна из важных черт крупных ученых – ощущение изменения ситуации, изменения, которое позволяет двигаться от незнания к знанию.

Итак, наука динамична. В тысячах научных журналах различного профиля сотни тысяч ученых печатают свои статьи, сообщая о новых данных и новых теоретических соображениех. Поток информации огромен, по сути необозрим. Возникают и совершенствуются новые формы хранения информации и поиска необходимых сведений.

Последний абзац написан не для того, чтобы углубиться в информатику, а для того, чтобы попросить разделить со мной мое восхищение следующим.

Понимание атомно-молекулярного строения макроскопических тел[2] привело к тому, что само слово «понимание» по отношению к макроскопическим явлениям и свойствам макротел приобрело новый смысл. Понять – означает в конечном итоге уразуметь, каким образом атомы, молекулы, электроны своим положением в теле (т.е. строением тела, его составом) и своим движением «осуществляют» то или иное свойство, явление. Естественно, совсем не каждый раз описание макроскопических свойств и явлений доводится до микроскопического уровня. Но, несомненно, любой факт, любое наблюдение – все, что не укладывается в атомно-молекулярную теорию, что ей противоречит, было бы отмечено, тщательно исследовано, получило известность, оценено и приобрело бы фундаментальное значение. Насколько мне известно, ничего подобного пока нет.

Иногда появляется ощущение, что открыто, обнаружено нечто, что не укладывается в прокрустово ложе современной квантовой физики. Но проходит немного времени, и либо «нечто» находит объяснение в рамках известных законов природы, либо оказывается ошибкой. Именно это обстоятельство дало мне основание назвать непредставимо огромную область «познанной землей».

После построения квантовой механики атомно-молекулярная физика стала завершенной наукой. Свойства трех типов частиц (электронов, протонов, нейтронов), из которых все построено, по-видимому, в полной мере определены. Все большее число ученых склоняются к мысли, что объяснение (описание) даже наиболее загадочного явления (феномена жизни) не потребует открытия у частиц (не только у электронов, протонов, нейтронов, но и у атомов и молекул) каких-либо специфических свойств, которые проявляют себя *только* тогда, когда частицы принимают участие в работе живого организма. Последний тезис, конечно, недоказуем. Но история науки за последние более чем 70 лет при ее поистине умопомрачительном взлете не знает ни одного факта, который бы этому утверждению противоречил.

Означает ли это, что на будущую физику выпала роль лишь уточнять описание происходящих явлений и совершенствовать наши представления о свойствах тел? Конечно, нет! Хочу лишь обратить внимание, где находятся на нашем воображаемом «глобусе» источники новых фактов, которые могут заставить изменить наши представления о том, из чего построен мир.

В начале XX века стало ясно, что попытка понять устройство мира требует изучения движения микроскопических объектов в областях пространства, в сто миллионов раз меньших одного сантиметра (таков размер атома). Выяснение того, что каждый атом содержит компактное ядро, состоящее из протонов и нейтронов, заставило сосредоточить внимание на пространственных масштабах, в сотни тысяч раз меньших, чем атом. Этим занялась ядерная физика, которая изучает структуру атомных ядер и силы, действующие между протонами и нейтронами. Хотя объекты ядерной физики столь миниатюрны ($10^{-14}-10^{-13}$ см), ее успехи принесли в мир ядерную энергетику и невиданные методы убийства – атомную и термоядерную (водородную) бомбы. Обойду молчанием *эти* достижения ядерной физики. К моему восхищению они мало что добавляют. Но в термоядерной физике есть нечто, что меня восхищает, – понимание механизма свечения Солнца и других звезд.

Проникновение в мир ядерных частиц привело к открытию совершенно неожиданных свойств микро-

[2] *Термин «макроскопическое тело» в данном контексте означает, что тело состоит из огромного числа атомов, молекул. Макроскопическое свойство, макроскопическое явление – свойство, явление, в осуществлении которых принимает участие огромное количество атомных и субатомных частиц.*

скопических частиц. Произошел пересмотр наших представлений о структурных единицах вещества – об элементарных частицах. Во-первых, элементарных частиц для роли первичных сущностей оказалось слишком много (сейчас их числится более 300). Во-вторых, элементарные частицы превращаются друг в друга. Именно поэтому нельзя из них выделить те три (электрон, протон, нейтрон), из которых построен макромир. Один из трех «кирпичей» – нейтрон, оказывается, живет вечно лишь внутри большинства ядер, а в свободном пространстве распадается на электрон, протон и антинейтрино[3]. В-третьих, все превращения элементарных частиц подчиняются строгим законам сохранения, которые есть следствия симметрии пространства. Выяснилось, что симметрия пространства значительно менее наглядна, чем представлялось.

Развитие физики элементарных частиц заставило попытаться «заглянуть» внутрь протона и нейтрона. Заглянули. И открылся новый мир. Мир *кварков*. Первое впечатление: сколько можно? Неужели частицы напоминают матрешки? И так до бесконечности? Идут годы. Мир кварков познается все с большими подробностями. Но все яснее становится, что дошли до чего-то истинно нового. Нет сомнений, что протоны и нейтроны состоят из кварков. Но вне частиц их нет. Они только *внутри*. Может быть, это свидетельство того, что физика добралась до по-настоящему первичных сущностей. Однако, не очень верится. Что-то слишком много разных кварков. Впереди много интересного...

Получается, что сигналы, которые могут заставить пересмотреть наши основные представления о фундаментальных законах природы, следует ожидать из субмикроскопических областей пространства. Но не только. Научившись получать и анализировать сигналы из далеких от нас мест во Вселенной, физики обнаружили, что есть нечто непонятное. Описывая динамику Вселенной, используя, казалось бы, прекрасно зарекомендовавшие себя законы природы, упираются в недоумение: для описания необходимо больше материи и энергии, чем во Вселенной удается обнаружить. В чем дело, покажет будущее. Напомню только, что сигналы «неблагополучия» приходят к нам с расстояний порядка 10^{10} световых лет, следовательно, из прошлого, удаленного от нас на 10^{10} лет.

Формула моего восхищения проста. Я восхищен познаваемостью мира и его реальной познанностью. Вне зависимости от того, что предстоит еще познать, меня восхищает то, что уже достигнуто. Область познанного – terra cognita – непредставимо огромна. Но, как говорилось, и на ней непрерывно рождается новое знание. Нет никаких оснований считать это знание второсортным в сравнении с тем, которое непосредственно раздвигает познанную область.

[3] *Не обращайте внимание на приставку «анти». Она написана для точности. Многие частицы существуют парами. Кажется, только антиэлектрону присвоено специальное наименование – позитрон. Частица и античастица могут аннигилировать – исчезнуть, например, превратившись в фотоны, как электрон и позитрон.*

В попытках объяснить наблюдаемые факты и предсказать новые явления или свойства рождаются новые идеи. Хотя эти идеи не противоречат основам современной квантовой физики, они столь нетривиальны, что вполне сопоставимы с открытиями на границе познанной области. Новые идеи иногда столь всеобщи, что не ограничены областью, в которой возникли. Некоторые переносятся на границу познанного пространства – в физику элементарных частиц, в физику Вселенной.

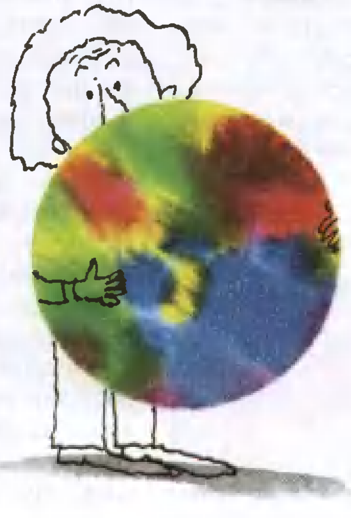
Ощущение единства физики и ее всеобщности – одна из составляющих моего восхищения.

* * *

Мы живем в окружении предметов и устройств, созданных благодаря использованию результатов достижений науки. С удовольствием перешел от пера и бумаги к компьютеру, трудно представить себе жизнь без телефона и телевизора. Самолет и радиоволны изменили ощущаемые размеры Земного шара. Восхищен телевизором и компьютером. Я не знаю точно, как они устроены. Плохо знаю конкретное устройство значительно более простых механизмов – тепловоза или автомобиля. Я представляю себе общие принципы, лежащие в основе инженерных разработок, и искренне благоговею перед теми, кто может наладить бесперебойную работу приборов, которыми успешно пользуюсь.

Но, откровенно говоря, не менее острое восхищение у меня вызывает другое – понимание того, *как* все устроено в природе. Понимание не обязательно мною. Мои знания конкретных подробностей весьма ограничены. Но я знаю, что есть те, кто знают. Нет такого человека, который знает о мире все. Знание распределено по многим. Хранитель знания – человечество. Трудами отдельных людей созданы монографии и энциклопедии. В них собрано знание о мире. Никакого простого знания не существует. Никто не владеет простой формулой, содержащей разгадку мироздания.

Сумма знаний, накопленных человечеством, внушает уважение и надежду на будущее. Очень хочется верить, что человечество в конце концов окажется достойным той удивительной картины мира, которую создало.



Теория экстремума раньше и теперь

В.ТИХОМИРОВ

Введение

Есть по меньшей мере три причины, побуждающие решать экстремальные задачи. Первая из них прагматическая: людям свойственно стремление наилучшим способом распорядиться своими ресурсами, и потому множество задач на максимум и минимум возникает в экономике, при решении технических вопросов, при управлении различными процессами.

Вторая причина вызвана не до конца осознанным свойством окружающего нас мира: многие законы природы описываются экстремальными принципами.

Третья причина – любознательность человека, его желание в чем-либо разобраться до конца. Это также часто приводит к необходимости решать задачи на максимум и минимум.

Приведем четыре примера.

1. Задача Евклида. В «Началах» Евклида (3 в. до н.э.) есть решение такой задачи на экстремум:

В треугольник ABC вписать параллелограмм ADEF максимальной площади (рис.1).

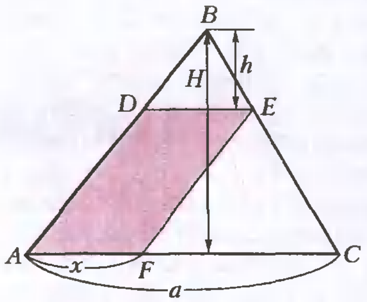


Рис. 1

Эта задача не вызвана потребностью извлечь из чего-либо какую-то пользу, она не объясняет явлений природы. Это просто любопытная геометрическая задача.

2. Задача Кеплера. В 1618 году Кеплер женился, и это склонило его к тому, чтобы благоустроить свое домашнее хозяйство. В тот год урожай винограда был очень хорош, и мимо его дома в Линце по Рейну плыли суда, груженые бочками вина. Кеплер попросил доставить несколько бочек во двор своего дома. Так и было сделано. А потом пришел оценщик, который определял вместимость бочек одним очень простым измерением. Он просовывал мерный шест в отверстие, затыкаемое пробкой, как это изображено на рисунке 2, и, поглядев на длину стержня, закрашенного вином, тут же объявлял цену. Это показалось Кеплеру странным: бочки были разными, а способ измерения вместимости – один и тот же. Любопытство побудило Кеплера исследовать этот вопрос математически. В итоге он создал предпосылки для рождения интегрального исчисления, описав многие методы вычисления площадей и объемов, а также решил несколько экстремальных задач. Обо всем этом он написал в книге, названной им «Новая стереометрия винных бочек», которую я очень рекомендую каждому почитать. В этой книге Кеплер, в частности, решает такую задачу:

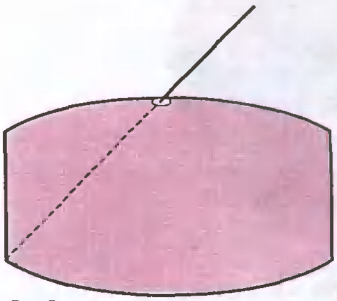


Рис.2

Вписать в шар прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Мы видим, что и эта задача была вызвана любознательностью и желанием до конца разобраться в сути дела.

3. Аэродинамическая задача Ньютона. В 1687 году вышло величайшее научное творение Ньютона – «Математические начала натуральной философии». В этой книге решается одна инженерная задача на экстремум. Ньютон поставил и разрешил *вопрос о теле вращения заданной ширины и высоты, испытывающем наименьшее сопротивление при движении в разреженной среде* (рис.3). При этом он написал, что его решение может быть «небесполезным при построении судов».

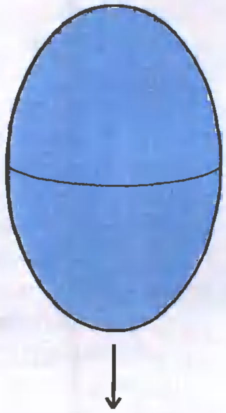


Рис.3

4. Задача о брахистохроне. В 1696 году произошло еще одно замечательное событие. Иоганн Бернулли опубликовал статью под названием «Одна задача, к решению которой приглашаются математики». Задача была поставлена так:

Определить путь от точки A до точки B (обе точки расположены в вертикальной плоскости), спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело M, начав двигаться из точки A, пройдет путь до B за минимальное время.

Эта задача получила название задачи о брахистохроне.

Здесь будет рассказано о четырех результатах общей теории экстремума, связанных с именами П.Ферма (1601–1665), Ж.Лагранжа (1736–1813), Л.Эйлера (1707–1783) и Л.С.Понтрягина (1908–1988). Все сформулированные задачи будут при этом решены.

Задачи без ограничений. Теорема Ферма (1638)

Пусть f – функция одного переменного (иначе можно сказать, что f определена на вещественной прямой $\mathbf{R}$; в этом случае пишут $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$). Рассмотрим задачу: *найти экстремум (т.е. максимум или минимум) функции f в задаче без ограничений*. Формально мы будем писать тогда так:

$$f(x)\to\text{extr}. \qquad (P_1)$$

Функцию f будем предполагать дифференцируемой. Напомним, что это значит.

Пусть приращение $f(\tilde{x}+x)-f(\tilde{x})$ функции f в точке $\tilde{x}$ может быть представлено в виде линейного выражения ax и остатка $r(x)$, где $r(x)$ «мало в сравнении с x». Точнее говоря, пусть

$$f(\tilde{x}+x)=f(\tilde{x})+ax+r(x),$$

$$\text{где } \lim_{x\to 0}\frac{|r(x)|}{|x|}=0.$$

Линейная функция $y=ax$ – это главная линейная часть приращения. В этом случае число a называется *производной функции f в точке $\tilde{x}$*. Ее обозначают $f'(\tilde{x})$. Имеет место

Теорема 1 (теорема Ферма). *Если функция f дифференцируема в точке $\tilde{x}$, которая доставляет максимум или минимум задаче (P_1), то*

$$f'(\tilde{x})=0. \qquad (1)$$

Исторический комментарий. Ферма не знал понятия производной, но фактически (в своем письме от 1638 года Робервалю и Мерсенну, через которых французские ученые осуществляли научную переписку – журналов в ту пору еще не существовало) он на словах выразил идею «главной линейной части приращения» функции и сказал, что она должна быть нулевой.

Понятие производной ввели Ньютон и Лейбниц.

Для Ньютона производная мыслилась как скорость изменения процесса. Результат теоремы 1 Ньютон выразил словами: *«когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течет ни вперед, ни назад»*.

Для Лейбница производная была тангенсом угла касательной с осью x. Так что теорема Ферма по Лейбницу звучит так: *касательная к графику функции f в точке максимума или минимума должна быть горизонтальной* (рис.4).

Отметим еще, что Кеплер в своей «Стереометрии» мимоходом обронил фразу, также выражающую суть теоремы Ферма. Он писал, что *«по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале несущественно»*.

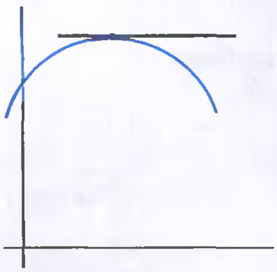


Рис.4

Затем еще, что равенство $f'(\tilde{x})=0$ – необходимое, но не достаточное условие экстремума. Так, точка 0 для функции $g(x)=x^3$ не максимум и не минимум, хотя $g'(0)=0$.

Решим с помощью теоремы Ферма задачу Евклида. Посмотрим снова на рисунок 1, где a – длина AC, x – длина AF и DE, H – высота ΔABC, а h – высота ΔDBE. Из подобия треугольников DBE и ABC вытекает отношение $\dfrac{x}{a}=\dfrac{h}{H}$. Площадь параллелограмма равна

$$x(H-h)=\frac{H}{a}x(a-x).$$

Так что задача свелась к отысканию максимума функции $f_0(x)=x(a-x)$ (постоянный множитель H/a мы отбросили) при ограничении на x: $0<x<a$. Но мы отбросим и это ограничение и рассмотрим задачу без ограничения:

$$f_0(x)=x(a-x)\to\max.$$

В точке максимума $\tilde{x}$ должно выполняться равенство

$$f'(\tilde{x})=0\text{, т.е. } \tilde{x}=\frac{a}{2}.$$

При этом

$$f_0(\tilde{x}+x)=\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2=f_0(\tilde{x})-x^2,$$

т.е. в $\tilde{x}$ действительно достигается максимум f_0 даже безо всяких ограничений и тем более – при наших ограничениях. Мы решили задачу: точка F должна быть серединой отрезка AC.

Рассмотрим теперь задачи без ограничений для функций многих переменных. В этом случае теорема Ферма выглядит точно так же, как и для одного переменного, но производная при этом – не одно число, а набор чисел. Продолжим обсуждение на примере функций трех переменных. Точку с координатами (x_1,x_2,x_3) будем обозначать для простоты просто x. Если $x=(x_1,x_2,x_3)$, то через $|x|$ обозначим величину $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Пусть f – функция трех переменных (тогда пишут $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$), причем приращение $f(\tilde{x}+x)-f(\tilde{x})$ в точке $\tilde{x}$ допускает представление в виде линейной части $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ и остатка $r(x)$, малого в сравнении с x. Точнее, пусть

$$f(\tilde{x}+x)=f(\tilde{x})+a\cdot x+r(x),$$

где $a=(a_1,a_2,a_3)$ – набор из трех чисел, $a\cdot x$ означает «скалярное произведение» a и x, т.е. $a\cdot x=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$, а

$$\lim_{|x|\to 0}\frac{|r(x)|}{|x|}=0.$$

Тогда говорят, что функция f дифференцируема в $\tilde{x}$ и a – производная f в точке $\tilde{x}$. Эту производную обозначим $f'(\tilde{x})$. Производная $f'(\tilde{x})$ составлена из трех чисел $\left(f'_{x_1}(\tilde{x}),f'_{x_2}(\tilde{x}),f'_{x_3}(\tilde{x})\right)$, где для вычисления, например, $f'_{x_1}(\tilde{x})$ надо вместо x_2 и x_3 подставить $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ и вычислить производную функции одного переменного $g_1(x_1)=f(x_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)$ в точке $\tilde{x}_1$. Аналогично определяются $f'_{x_2}(\tilde{x})$ и $f'_{x_3}(\tilde{x})$.

Рассмотрим задачу без ограничений

$$f(x)\to\text{extr}, \qquad (P_1')$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ или даже $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ (функция n переменных). Имеет место

Теорема 1′. *Если функция f дифференцируема и точка $\tilde{x}$ является решением задачи (P_1'), то*

$$f'(\tilde{x}) = 0$$

(или $f'_{x_1}(\tilde{x}) = f'_{x_2}(\tilde{x}) = f'_{x_3}(\tilde{x}) = 0$).

Но интересных задач без ограничений мало; как правило, важные задачи – это задачи с ограничениями. Общий прием исследования задач с ограничениями принадлежит Лагранжу.

Конечномерные задачи с ограничениями. Правило множителей Лагранжа (1801)

Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \text{extr}, \quad f_1(x) = 0, \qquad (P_2)$$

где f_0 и f_1 – функции n переменных: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ (в этом случае пишут $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$).

Обратимся к задаче Кеплера. Пусть мы провели ортогональные оси, но переменные обозначили не x, y и z, а x_1, x_2 и x_3 (рис.5). Тогда сфера радиуса 1 запишется уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 .$$

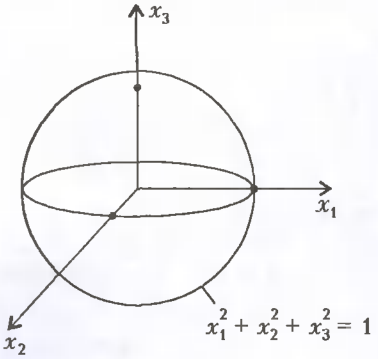


Рис.5

Пусть одна из вершин прямоугольного параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям, лежит на этой сфере и имеет координаты $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_3 > 0$. При этом объем этого параллелепипеда равен $8x_1x_2x_3$.

Мы привели два примера функций трех переменных: $f_1(x) = 8x_1x_2x_3$ и $f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$.

Лагранжу принадлежит прием решения задач типа (P_2). Он описал свой метод в книге «Теория аналитических функций», изданной в 1801 году. Метод состоит в том, что надо составить функцию $L(x,\lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x)$ с неопределенными множителями λ_0 и λ_1 (эту функцию стали называть функцией Лагранжа, а $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ – набором множителей Лагранжа) и применить теорему Ферма к задаче $L(x,\lambda) \to \text{extr}$ без ограничений. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть функции f_i дифференцируемы и точка $\tilde{x}$ является решением задачи (P_2). Тогда найдется набор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$, отличный от нулевого ($|\lambda_0| + |\lambda_1| \neq 0$), такой, что*

$$L'_x(\tilde{x},\lambda) = 0 \Leftrightarrow L'_{x_1}(\tilde{x},\lambda) = 0, \; L'_{x_2}(\tilde{x},\lambda) = 0, \ldots$$
$$\ldots, \; L'_{x_n}(\tilde{x},\lambda) = 0 . \quad (2)$$

Эту теорему (и теоремы, сходные с ней) называют правилом множителей Лагранжа.

Решим методом Лагранжа задачу Кеплера. Она формализуется так:

$$f_0(x) = x_1x_2x_3, \; f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \qquad (2а)$$

(множитель 8 мы отбросили). Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,\lambda) = \lambda_0 x_1x_2x_3 + \lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\right).$$

Пусть $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$. При этом $\tilde{x}_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, – иначе не получится параллелепипеда. По теореме Лагранжа,

$$L'_{x_1}(\tilde{x},\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_0\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + 2\lambda_1\tilde{x}_1 = 0 ,$$

или, домножая на $\tilde{x}_1$,

$$\lambda_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + 2\lambda_1\tilde{x}_1^2 = 0 .$$

Аналогично, из $L'_{x_2}(\tilde{x},\lambda) = 0$ вытекает, что $\lambda_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + 2\lambda_1\tilde{x}_2^2 = 0$, а из $L'_{x_3}(\tilde{x},\lambda) = 0$ следует, что $\lambda_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + 2\lambda_1\tilde{x}_3^2 = 0$. При этом, если допустить, что $\lambda_1 = 0$, получилось бы, что $\lambda_0 = 0$, а это противоречит утверждению теоремы о том, что оба множителя Лагранжа не являются нулями.

Мы видим, что

$$\tilde{x}_i^2 = -\frac{\lambda_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3}{2\lambda_1},$$

т.е. решением может быть только куб, у которого

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

В математическом анализе доказывается, что решение задачи (2а) существует, но тогда оно удовлетворяет теореме 2, а решений уравнения (2) для этой задачи 8, и все они являются вершинами куба. Значит, куб и есть решение задачи Кеплера.

Задачи вариационного исчисления. Теорема Эйлера (1744)

Могло показаться странным, что при перечислении имен математиков, чей вклад в теорию экстремума мы обсуждаем, я сначала упомянул Лагранжа, а не его старшего коллегу Эйлера, тем самым, вроде бы, изменив хронологии событий: правило множителей мы датировали 1801-м годом, а уравнение Эйлера – 1744-м.

Дело в том, что история теории экстремума совершила неожиданный скачок и от функций одного переменного сразу перешла к функциям от кривых, т.е. по сути дела к функциям от бесконечного числа переменных. Поясним это на примере брахистохроны («наискорейшей» из кривых).

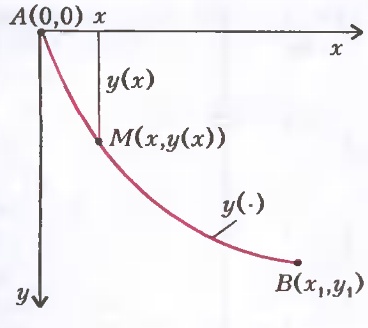


Рис.6

Направим ось Oy вертикально вниз, поместим точку A в начало координат, а координаты точки B обозначим (x_1, y_1) (рис. 6). Пусть $y(\cdot)$ – некоторая кривая ($y(\cdot)$ –

символ самой функции, $y(x)$ – значение функции $y(\cdot)$ в точке x). Согласно закону Галилея, тело массы m, спускающееся по кривой $y(\cdot)$ из начала координат под воздействием силы тяжести, приобретает в точке M с координатами $(x,\ y(x))$ скорость, не зависящую от массы m и от пути, по которому она попадет в точку M. Следовательно, двигаясь по кривой $y(\cdot)$ от точки M с координатами $(x,\ y(x))$ до точки $(x+dx, y(x+dx))$, при малом dx оно пройдет путь, примерно равный

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2+y'^2(x)dx^2} = \sqrt{1+y'^2(x)}dx\,,$$

а значит, время dt прохождения этого пути будет примерно равно длине пути, деленной на скорость $\sqrt{2gy}$, т.е. $dt = \dfrac{\sqrt{1+y'^2(x)}dx}{\sqrt{2gy}}$. Выходит, что полное время прохождения пути от A до B будет равно $\int\limits_0^{x_1}\dfrac{\sqrt{1+y'^2(x)}dx}{\sqrt{2gy}}$.

Мы формализовали задачу о брахистохроне: требуется найти по всем кривым $y(\cdot)$, удовлетворяющим условиям $y(0)=0,\ y(x_1)=y_1$, минимум написанного интеграла, или

$$\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}dx}{\sqrt{y}} \to \min\,,\ y(0)=0,\ y(x_1)=y_1$$

(множитель $\dfrac{1}{\sqrt{2g}}$ мы отбросили).

В начале двадцатых годов XVIII столетия на лекции И.Бернулли стал ходить юноша, совсем еще мальчик, который обратил на себя внимание лектора своей склонностью к математике. Этим юношей был Леонард Эйлер. И.Бернулли поставил перед Эйлером задачу отыскать общий метод решения подобных задач, и Эйлер такой метод отыскал. Задачу о брахистохроне он обобщил так. Пусть $f = f(x,\ y,\ z)$ – функция трех переменных и $y(\cdot)$ – дифференцируемая функция на отрезке $[x_0;x_1]$. Тогда число, равное $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,y(x),y'(x))dx$, зависит от кривой $y(\cdot)$. Это – «функция от функции» (когда-то ее называли функционалом, и сейчас иногда так делают). Обозначим ее $J(y(\cdot))$. В задаче о брахистохроне, например, $f(x,\ y,\ z) = \dfrac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{y}}$ (f от x не зависит).

Эйлер разработал метод решения таких задач:

$$J(y(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,y(x),y'(x))dx \to \mathrm{extr}\,,$$
$$y(x_0)=y_0\,, y(x_1)=y_1\,. \qquad (P_3)$$

Функцию f называют *интегрантом* в задаче (P_3).

Задачи (P_3) называют простейшими задачами вариационного исчисления. Имеет место

Теорема 3. *Если функция f дифференцируема (как функция трех переменных), а функция $\tilde{y}(\cdot)$ является решением задачи (P_3), то должно удовлетворяться дифференциальное уравнение*

$$-\frac{d}{dx}f_z(x,\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)) + f_y(x,\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)) = 0. \quad (3)$$

Это уравнение получило название уравнения Эйлера.

Если f не зависит от x, то уравнение (3), как говорят, допускает интеграл, т.е. $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{y}'(x)f_z(\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)) - f(\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)) = \mathrm{const}\,. \quad (3а)$$

Действительно, дифференцируя левую часть (3а) по x, получаем

$$\tilde{y}''(x)f_z(\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)) +$$
$$+\ \tilde{y}'(x)\frac{d}{dx}f_z(\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)) - f_y(\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x))\tilde{y}'(x) -$$
$$-\ f_z(\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x))\tilde{y}''(x) =$$
$$= \tilde{y}'(x)\left(\frac{d}{dx}f_z(\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)) - f_y(\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x))\right) = 0.$$

Применим (3а) к брахистохроне. Имеем:

$$y'f_z - f = \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\,,$$

т.е.

$$\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2} = \mathrm{const} = \sqrt{C} \Rightarrow \sqrt{\frac{C}{y}-1} = \frac{dy}{dx}\,.$$

Делаем замену $y = C\sin^2\dfrac{\tau}{2}$. Тогда $\dfrac{dy}{d\tau} = C\cos\dfrac{\tau}{2}\sin\dfrac{\tau}{2}$.

Но $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\tau}\cdot\dfrac{d\tau}{dx}$. Отсюда, учитывая, что $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}$, имеем

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\frac{dy}{d\tau}}{\frac{dy}{dx}} = C\sin^2\frac{\tau}{2}.$$

Откуда получаем представление решения в параметрической форме:

$$y = \frac{C}{2}(1-\cos\tau),\quad x = \frac{C}{2}(\tau - \sin\tau).$$

Эта кривая называется циклоидой.

Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (1958)

С момента опубликования Эйлером своего знаменитого мемуара «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума и минимума, или Решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле», в котором были разработаны начала вариационного исчисления и в том числе выведено уравнение, называемое теперь уравнением Эйлера, прошло свыше двухсот лет, в течение которых вариационное исчисление почти достигло завершения. В частности, был рассмотрен класс задач с ограничениями, подобный (P_3):

$$J_0(y(\cdot)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} f_0(x,y(x),y'(x))dx \to \min\,,$$

$$J_1(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x, y(x), y'(x))\,dx = \gamma\,,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \qquad (P_3')$$

(такие задачи Эйлер назвал «изопериметрическими в самом широком смысле»). К этой задаче применима та же идея Лагранжа, которая была обсуждена выше. А именно, для решения (P_3') надо составить функцию Лагранжа:

$$L(y(\cdot),\lambda) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\lambda_0 f_0(x,y(x),y'(x)) + \lambda_1 f_1(x,y(x),y'(x))\right)dx\,,$$

рассмотрев задачу минимизации этой функции, выписать уравнение Эйлера:

$$-\lambda_0 \frac{d}{dx} f_{0z}(x,y(x),y'(x)) + \lambda_0 f_{0y}(x,y(x),y'(x)) -$$

$$- \lambda_1 \frac{d}{dx} f_{1z}(x,y(x),y'(x)) + \lambda_1 f_{1y}(x,y(x),y'(x)) = 0\,, \qquad (3')$$

решить его и постараться удовлетворить условию

$$J_1(y(\cdot)) = \gamma$$

(уравнения типа $(3')$ называют уравнениями Эйлера–Лагранжа).

Покажем, как применяются эти уравнения, на примере

$$\int_0^{\pi} y^2 dx \to \max\,, \quad \int_0^{\pi} y'^2 dx \le 1\,, \quad y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Здесь уравнение $(3')$ имеет вид $-\lambda_1 y'' + \lambda_0 y = 0$, или $y'' + \nu y = 0$. Граничным условиям удовлетворяет серия $y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n}\sin nx$. Наибольшее значение достигается на функции $y_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$.

А по прошествии двухсот лет, в сороковые-пятидесятые годы XX века, потребности теории управления, экономики, космической навигации, военно-промышленного комплекса привели к необходимости дополнить теорию вариационного исчисления введением нового ограничения – ограничения типа неравенств на скорости, средства управления и т.п.

В применении к задаче (P_3) такого рода ограничения выглядят как ограничение на производную функции $y(\cdot)$. Запишем его в виде $y'(x) \in U$, где U – некоторое подмножество $\boldsymbol{R}$ (скажем, конечный отрезок $[a;\ b]$, или полупрямая $\boldsymbol{R}_+ = \{x \ge 0 (x \in \boldsymbol{R}\}$, или даже две точки, когда $y'(x)$ может быть равно, скажем, нулю или единице).

Первой задачей оптимального управления была, без сомнения, аэродинамическая задача Ньютона. Ньютон в своих «Математических началах» привел лишь ответ к задаче, без ее формализации и решения.

Задачу формализовали и попробовали решить аналитически два известных современника Ньютона – И.Бернулли и его ученик Лопиталь. Они направили тело по горизонтали, но если бы они направили тело по вертикали, то пришли бы к более простому выражению для интегранта, что приводит к задаче

$$J(y(\cdot)) = \int_0^{x_1} \frac{x\,dx}{1 + y'^2(x)} \to \min\,, \ y(0) = 0\,, \ y(x_1) = y_1\,. \qquad (3'\text{a})$$

«Но это же задача вариационного исчисления, – скажете вы, – задача (P_3) с интегрантом

$$f(x,z) = \frac{x}{1+z^2}\,!»$$

Более того, здесь есть нечто странное: если брать зазубренный профиль с большими по модулю наклонами (рис.7), то y'^2 будет очень велико и интеграл $(3'\text{a})$ может стать сколь угодно малым. Один из серьезных специалистов в теории управления Л.Янг в своей в целом интересной книге «Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления» (М.: Мир, 1974, с. 42) вынес суровый приговор «малограмотному Ньютону». Он пишет: «Ньютон сформулировал вариационную задачу о теле вращения, испытывающем наименьшее сопротивление при движении в газе. Принятый им закон сопротивления физически абсурден, в результате чего поставленная задача не имеет решения (чем более зазубрен профиль, тем меньше сопротивление)». Увы, Янг сам проявил здесь поразительную безграмотность: написав книгу по вариационному исчислению и оптимальному управлению, он не понял, что задача Ньютона не вариационная задача, а задача оптимального управления, ибо подразумевается *монотонность профиля*, т.е. ограничение типа неравенства $y' \ge 0$. Решение Ньютона было абсолютно правильным!

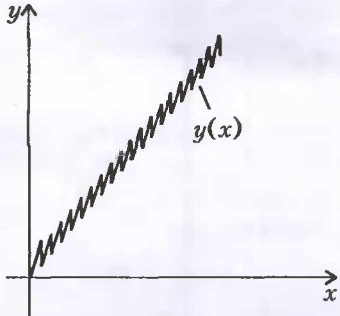


Рис. 7

Следующая задача является частным, но выразительным примером задач оптимального управления:

$$J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y(x),y'(x))\,dx \to \min\,, \ y(x_0) = y_0\,,$$

$$y(x_1) = y_1\,, \ y'(x) \in U\,, \qquad (P_4)$$

где U – некоторое подмножество $\boldsymbol{R}$. В задаче Ньютона $f(x,z) = \frac{x}{1+z^2}$, а $U = \boldsymbol{R}_+$. Имеет место

Теорема 4 (принцип максимума Понтрягина для задачи (P_4)). *Если интегрант f является дифференцируемым как функция трех переменных, а $\tilde{y}(\cdot)$ – решением задачи (P_4), то выполнены следующие условия: существует функция $p(\cdot)$ такая, что*

$$-p'(x) + f_y(x,\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)) = 0\,, \qquad (4)$$

$$\max_{u\in U}\left(p(x)u-f\left(x,\tilde{y}(x),u\right)\right)=$$
$$=p(x)\tilde{y}'(x)-f\left(x,\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)\right). \quad (4a)$$

Если $U=\mathbf{R}$, то соотношение (4a) можно продифференцировать по u. Тогда получится, что $p(x)=f_z\left(x,\tilde{y}(x),\tilde{y}'(x)\right)$ и (4) будет означать не что иное как уравнение Эйлера. Таким образом, принцип максимума Понтрягина обобщает уравнение Эйлера.

Заключительные замечания

Решим сначала задачу Ньютона. Интегрант f задачи Ньютона не зависит от y, значит (из (4)), $p(x)=\text{const}=p$, и далее надо исследовать такую задачу на максимум функции одного переменного:

$$g(u,x)=pu-\frac{x}{1+u^2}\to\max,\ u\geq 0$$

(по u при фиксированном x).

Ясно, что $p<0$, иначе $\max=\infty$. Если x мало, то максимум достигается в нуле. Это происходит до того момента, пока значение в нуле не становится равным второму, положительному минимуму этой функции. Точка излома функции $\tilde{y}(\cdot)$, являющейся решением задачи Ньютона, характеризуется уравнением

$$p=-\frac{2\tilde{y}(\xi)\xi}{\left(1+\tilde{y}'(\xi)\right)^2},\ \xi=\frac{\xi}{1+\tilde{y}'^2(\xi)}-p\tilde{y}'(\xi).$$

Отсюда вытекает, что $\tilde{y}'(\xi)=1$, $\xi=2p$. А далее решаем уравнение $g'_x=0$, и это приводит к такому решению в параметрической форме:

$$y=c\left(\ln\frac{1}{u}+u^2+\frac{3}{4}u^4\right),\ x=c\left(\frac{1}{u}+2u+u^2\right).$$

Константа c определяется из условия $y(x_1)=y_1$.

Кривая, задаваемая полученными уравнениями, называется кривой Ньютона. Мы видим, что решение задачи Ньютона имеет излом (рис.8). Это также вызывало улыбку многих инженеров: где это видано, чтобы

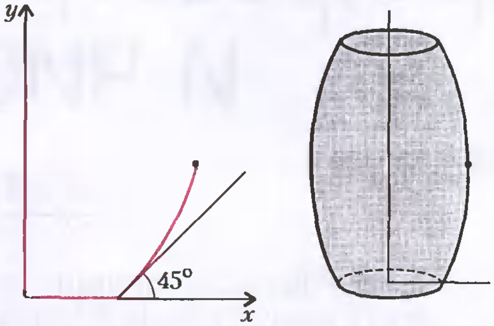


Рис. 8

«суда» имели плоский, а не заостренный участок спереди (как на рисунке 8 справа)! Инженеры считали, что тело минимального сопротивления должно иметь форму яйца, как и было изображено на рисунке 3. А Ньютон, вычислив угол излома (45°), сказал, что именно это замечание может быть небесполезным при построении судов, именно излом!

И снова он оказался прав. Это «замечание» оказалось «небесполезно» при построении «судов», а именно сверхзвуковых самолетов и космических аппаратов, пронзающих пространство, где атмосфера моделируется «редкой средой Ньютона». Недаром оптимальное управление было стимулировано, среди прочего, космической проблематикой. И когда дело дошло до конструирования аппаратов, летающих с огромными скоростями на больших высотах, Ньютон стал одним из самых цитируемых авторов.

Более подробно об условиях экстремума и о решении экстремальных задач можно прочитать в моей книге «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып.56. – М.: Наука, 1986).

Профессор от артиллерии и число «пи»

А. ВАСИЛЬЕВ

Юрий (в немецкой транскрипции – Георг) Вега родился в 1756 году в Загорице близ Любляны (Словения), где юношей в течение шести лет посещал высшую ступень школы. По окончании лицея в Любляне он приобрел квалификацию инженера, а с 1780 года стал профессором артиллерийского училища в Вене. К этому времени он уже обладал обширными познаниями в логике, математике, физике, баллистике, геодезии и других специальных дисциплинах.

Вега был не только строгим преподавателем, но и участвовал в самых жестоких войнах своего времени. В 1788 году он командовал артиллерийскими батареями при осаде и взятии укрепленного турками Белграда; в 1793–97 годах воевал против революционной Франции и принял участие в битвах при Майнце, Мангейме, Висбадене и других городах. В 1796 году он был награжден орденом Марии Терезии, а в 1800 – удостоен баронского титула. На его родовом гербе изображено пушечное ядро.

При жизни Вега не был обойден признанием, он был членом академических сообществ Майнца, Эрфурта, Гёттингена, Берлина и Праги. Смерть барона окутана тайной: в сентябре 1802 года он исчез, а позже его тело было найдено в Дунае под Веной.

Известен Вега и своими математическими работами. Еще в 1783 году он опубликовал таблицы логарифмов, а затем – таблицы интегралов и ряд других справочных материалов. Эти книги были переведены на многие языки и выдержали более 100 изданий. С 1782 по 1800 год он подготовил и издал четырехтомный учебник математики. Некоторые из приведенных в нем оригинальных математических формул представляют интерес и сейчас. Например, он выразил синусы и косинусы всех углов с шагом в три градуса через простые дроби и квадратные корни из простых чисел.

Помимо книг и учебников, им было опубликовано по меньшей мере шесть научных работ. Одна из наиболее важных, вышедшая в свет в 1789 году, была посвящена вычислению числа

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264\ldots$$

История этого числа тщательно прослежена математиками, и имя Юрия Веги занимает в ней почетное место.

Первый расчет отношения длины окружности к ее диаметру принадлежит Архимеду (3 век до н.э.). Он установил, что $223/71 < \pi < 22/7$. Вызывает уважение тот факт, что ученый уже тогда не претендовал на установление точного значения числа π.

К началу XVII века было вычислено 35 знаков десятичного разложения числа π. Этот рекордный результат принадлежал профессору математических и военных наук Лейденского университета Лудольфу ван Цейлену. Как и многие предшественники, Цейлен в своих кропотливых вычислениях (продолжавшихся всю жизнь!) опирался на разработанный Архимедом метод вписанных и описанных окружностей.

Новые инструментальные средства математического анализа, которые стали применять исследователи в конце XVII века, позволили взглянуть на число π с совершенно неожиданной стороны.

Немецкому математику Готфриду Вильгельму Лейбницу принадлежит красивая формула разложения в ряд:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots,$$

позволяющая, по крайней мере в принципе, вычислять число π со сколь угодно высокой точностью. Еще более эффективные расчетные зависимости получили Авраам Шарп:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \ldots\right)$$

– с помощью этого разложения ему удалось в 1699 году получить 71 точный знак числа π, и Джон Мэчин:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \ldots\right)$$

– это разложение позволило Мэчину в 1706 году вычислить 100 десятичных знаков числа π.

В 1794 году Юрий Вега указал значение числа π с точностью до 140 десятичных знаков, из которых точными оказались 136. Этот рекорд продержался около 50 лет.

Сегодня с помощью компьютера вычислено свыше триллиона десятичных знаков числа π (при этом используются алгоритмы, разработанные на базе высших разделов современной математики – теории эллиптических и модулярных функций).

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

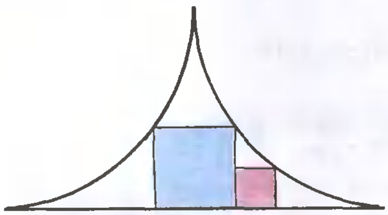
Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2004 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2004» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1901» или «Ф1908». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1901–М1905, Ф1908–Ф1912

М1901. В криволинейный треугольник, ограниченный дугами равных касающихся окружностей и их общей касательной, помещены синий и красный квадраты, как показано на рисунке. Докажите, что сторона синего квадрата вдвое больше стороны красного.



В.Произволов

М1902. На встречу выпускников пришли 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Каково наибольшее число знакомств среди участников встречи?

С.Берлов

М1903. На плоскости дан отрезок AB. На сторонах AX и BX треугольника ABX как на диаметрах внешним образом построены полуокружности ω_1 и ω_2 соответственно. Найдите множество точек X таких, что существует окружность Ω, касающаяся полуокружностей ω_1 и ω_2 в их серединах.

В.Сендеров

М1904. Натуральные числа a, b и c удовлетворяют равенству $a\left(b^2+c^2\right)=2b^2c$. Докажите неравенство $2b \le a\sqrt{a}+c$.

Н.Осипов

М1905. Квадратными салфетками в количестве 50 штук размером 1×1 каждая нужно покрыть в два слоя квадратный стол размером 5×5 так, чтобы никакой участок края любой из салфеток не принадлежал краю стола. Как это сделать? (Салфетки разрешается перегибать.)

В.Произволов

Ф1908. Жесткий стержень движется по плоскости. В некоторый момент скорость одного из концов стержня равна по величине 1 м/с, скорость второго конца составляет по величине 2 м/с. Какой может быть в этот момент скорость центра стержня?

А.Стержнев

Ф1909. Грузы, массы которых M и $2M$, связаны легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок. К оси этого блока привязана еще одна нить, она переброшена через неподвижный блок, а к другому ее концу прикреплен третий груз. При какой массе этого груза один из упомянутых трех грузов может оставаться некоторое время неподвижным после растормаживания системы?

З.Рафаилов

Ф1910. Порция азота занимает объем V = 20 л при давлении p = 0,5 атм и температуре T = 300 К. С газом производят следующий процесс: ему медленно сообщают количество теплоты Q = 300 Дж, при этом температура газа увеличивается на $\Delta T = 10$ К. Сжимался газ или расширялся?

А.Простов

Ф1911. На тороидальный сердечник из материала с большой магнитной проницаемостью намотали катушку с большим числом витков. Катушку подключили к источнику с большим внутренним сопротивлением – через 1 с ток практически перестал меняться и оказался равным 10 мА. На второй точно такой же сердечник намотали еще одну катушку, используя кусок такого же провода, но вдвое большей длины. Катушки соединили параллельно и снова подключили к тому же источнику. Какие токи будут протекать через катушки через 1 с после подключения? Какими станут эти токи через большое время? Катушки расположены так, что магнитное поле одной из них не создает потока через другую. Провод, которым намотаны катушки, имеет малое удельное сопротивление.

А.Зильберман

Ф1912. В вашем распоряжении есть резистор сопротивлением 1000 Ом, катушка индуктивностью 1 Гн и конденсатор емкостью 10 мкФ. Источник переменного напряжения частоты 50 Гц имеет амплитуду 1 В. Как нужно соединить элементы цепи, чтобы ток через резистор был минимально возможным (но не нулевым)? Как нужно их соединить, чтобы ток через резистор был максимальным? Найдите амплитуды этих токов. Элементы цепи считайте идеальными.

Р.Александров

Решения задач М1876–М1885[1], Ф1893–Ф1897

М1876. *а) Во всех клетках квадрата $n \times n$ стоят минусы. За один ход можно поменять знаки в одной из четырех фигурок:*

При каких n можно получить плюсы во всех клетках квадрата?
б) Докажите, что если в каком-то квадрате поменяли таким образом все знаки, то при этом фигурки каждого из четырех видов использовались одинаковое по четности число раз.

а) Пусть n нечетно. Тогда в квадрате нечетное число клеток, в каждой из которых нужно поменять знак нечетное число раз. Значит, всего нужно поменять знаки нечетное число раз. За один ход меняется 4 знака. Следовательно, поменять знаки нечетное число раз не удастся.

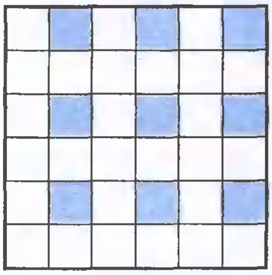


Рис.1

Допустим, что удалось поменять знаки при $n = 4k + 2$. Раскрасим квадрат, как показано на рисунке 1. Каждый ход меняется знак в 1 черной клетке. Их всего нечетное число. Значит, будет нечетное число ходов. Теперь разобьем квадрат на квадратики 2×2 и раскрасим их в шахматном порядке, как показано на рисунке 2. Каждым ходом меняется знак либо в 1, либо в 3 черных клетках. Будет сделано нечетное число ходов. Значит, знаки в черных клетках будут меняться нечетное число раз. Но тогда знак сменится в нечетном числе черных клеток, а их четное число. Следовательно, мы не добьемся нужного результата.

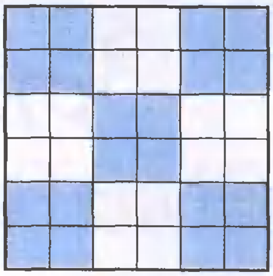


Рис.2

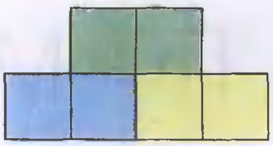


Рис.3

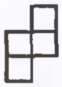
Пусть $n = 4k$. Если сменить знаки в двух фигурках (первая состоит из голубых и зеленых клеток, а вторая – из желтых и зеленых), как показано на рисунке 3, то в итоге знаки сменятся в прямоугольнике 1×4, состоящем из голубых и желтых клеток, а в прямоугольнике 1×2, состоящем из зеленых клеток, знаки сохранятся. Покрывая такими прямоугольниками наш квадрат, мы сменим знаки во всех клетках.

б) Как уже доказано, сторона квадрата делится на 4. Опять раскрасим квадрат, как показано на рисунке 1. Теперь черных клеток четное число. Поскольку каждый ход меняется знак в 1 черной клетке, то будет сделано четное число ходов.

Назовем исходные фигурки так:

 – правая горизонтальная (ПГ),

 – левая горизонтальная (ЛГ),

 – правая вертикальная (ПВ),

 – левая вертикальная (ЛВ).

Раскрасим квадрат, как показано на рисунке 4. Каждая горизонтальная фигурка покрывает нечетное число черных клеток, а вертикальная – четное. Черных клеток четное число. Значит, горизонтальные фигурки будут использоваться четное число раз, т.е. ПГ и ЛГ фигурки используются одинаковое по четности число раз.

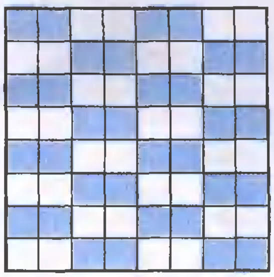


Рис.4

Теперь раскрасим квадрат так, как показано на рисунке 5. Всего черных клеток $n^2/4$ – четное число. Правые фигурки накрывают нечетное число черных клеток, а левые – четное. Значит, правых фигурок использовано четное число, т.е. ПГ и ПВ фигурок – одинаковое по четности число.

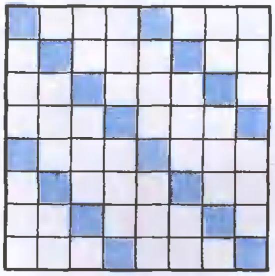


Рис.5

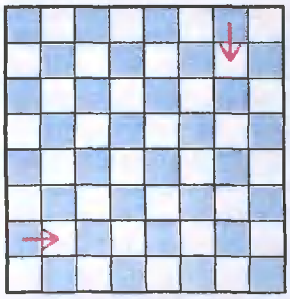
Итак, ПВ, ПГ и ЛГ фигурок –

[1] *Решению задачи М1885 будет посвящена отдельная статья в одном из ближайших номеров журнала.*

одинаковое по четности число. Но так как было сделано четное число ходов, то и число ЛВ фигурок имеет ту же четность.

Д.Пермяков

М1877. *За 64 хода король обошел все поля шахматной доски и вернулся на прежнее место. Среди прочих он сделал ходы a2-b2 и g8-g7 (см. риунок). Докажите, что король сделал не меньше двух диагональных ходов.*



Маршрут нашего короля представляет собой замкнутую ломаную линию M, которая проходит через центры всех полей шахматной доски и на которой задано направление обхода. Ломаная M состоит из 64 стрелок, каждая из которых показывает один из ходов короля. Допустим, что король не сделал ни одного диагонального хода. Нетрудно убедиться, что среди прочих на ломаной M имеются стрелки a1-a2 и h8-g8. Значит, два хода короля по краю доски противоположно ориентированы: один по часовой стрелке, а другой против часовой стрелки. Но этого не может быть, поскольку ломаная M не имеет самопересечений. Значит, все-таки король сделал хотя бы один диагональный ход.

Покажем теперь, что число диагональных ходов может быть только четным.

Диагональным ходом король переходит с поля какого-нибудь цвета на поле того же цвета. Пусть из 32 ходов, когда король ступал на черное поле, k ходов были диагональными, т.е. k раз король ходил с черного поля на черное. Значит, $32 - k$ раз король ходил с белого поля на черное. Но так как король ходил с белого поля ровно 32 раза, то из них он ходил ровно k раз с белого поля на белое. Итак, король ходил с поля на поле того же цвета $2k$ раз.

В.Произволов

М1878. *На высоте CH треугольника ABC построена, как на диаметре, окружность. Докажите, что касательные к этой окружности, проведенные в точках ее пересечения со сторонами AC и BC, пересекаются на медиане CM треугольника.*

Пусть X, Y – точки пересечения окружности с AC и BC, N – точка пересечения касательных, Z – вторая точка пересечения с окружностью прямой CN. Из подобия прямоугольных треугольников ACH и CHX, а также BCH и CHY следует, что $CX \cdot CA = CH^2 = CY \cdot CB$, т.е. треугольники ABC и YXC подобны. Из подобия треугольников NZY и NYC, а также NZX и NXC имеем $ZY/CY = ZN/NY = ZX/CX$, т.е. $ZX \cdot CY = ZY \cdot CX$. Проведем медиану треугольника CXY и продлим ее до пересечения с окружностью в точке W. Так как площади треугольников CXW и CYW равны, $CX \cdot XW = CY \cdot YW$. Следовательно, $XW = YZ$ и $\angle XCW = \angle YCZ$, что в силу подобия треугольников ABC и YXC равносильно утверждению задачи.

А.Заславский

М1879. *На левую и правую чашки весов положили по 100 гирек из набора 1 г, 2 г, 3 г, ..., 200 г. Значимостью гирьки с какой-либо чашки назовем число тех гирек с другой чашки, которые легче ее. Докажите, что весы покажут равновесие тогда и только тогда, когда суммарная значимость гирек левой чашки равна суммарной значимости гирек правой чашки.*

Пусть 100 гирек с левой чашки весов имеют массы $m_1 < m_2 < \ldots < m_{100}$, а с правой чашки — массы $M_1 < M_2 < \ldots < M_{100}$. Значимость гирьки с массой m_i обозначим через r_i, а с массой M_i – через R_i, где $1 \le i \le 100$.

Допустим, что весы показывают равновесие, т.е.

$$\sum_{i=1}^{100} m_i = \sum_{i=1}^{100} M_i .$$

Докажем, что

$$\sum_{i=1}^{100} r_i = \sum_{i=1}^{100} R_i .$$

Обозначим через a_i число гирек на левой чашке весов, которые легче гирьки с массой m_i, а через A_i – число гирек с правой чашки весов, которые легче гирьки с массой M_i. Тогда можно записать, что $a_i + r_i = m_i - 1$ и $A_i + R_i = M_i - 1$ для $1 \le i \le 100$.

Число $\sum_{i=1}^{100} a_i$ равно количеству всевозможных пар, которые можно составить из 100 элементов, т.е. равно $\frac{100 \cdot 99}{2}$. Тому же равно число $\sum_{i=1}^{100} A_i$. Значит, $\sum_{i=1}^{100} a_i = \sum_{i=1}^{100} A_i$. Отсюда сразу следует, что $\sum_{i=1}^{100} r_i = \sum_{i=1}^{100} R_i$.

Обратное утверждение доказывается по той же схеме в обратном порядке.

В.Произволов

М1880. *На прямой даны $2k - 1$ белых и $2k - 1$ черных отрезков. Известно, что любой белый отрезок пересекается хотя бы с k черными, а любой черный – хотя бы с k белыми. Докажите, что найдутся черный отрезок, пересекающийся со всеми белыми отрезками, и белый отрезок, пересекающийся со всеми черными.*

Докажем более сильное утверждение: если любой белый отрезок пересекается хотя бы с k черными, то найдется черный, пересекающийся со всеми белыми.

Предположим противное. Выберем для каждого черного отрезка белый, пересекающийся с ним. Такой белый отрезок лежит либо левее соответствующего черного, либо правее его. Следовательно, есть хотя бы k черных отрезков, для каждого из которых «его» белый отрезок лежит по одну и ту же сторону от него – пусть, для определенности, левее его. Для каждого из этих черных отрезков его левый конец лежит правее правого конца соответствующего ему белого отрезка. Тогда, если мы выберем из правых концов белых отрезков самый левый, то он будет лежать левее хотя бы k левых концов черных отрезков, т.е. этот белый отрезок не будет пересекаться ни с одним из этих k черных отрезков. Противоречие налицо.

В.Дольников

М1881. *Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство*

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

Первое решение. Воспользуемся следующими неравенствами:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geq\frac{4}{a+2b+c},$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{4}{b+2c+a},$$

$$\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{c+2a+b},$$

которые следуют из очевидного неравенства

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$$

для положительных x, y. Сложив эти 3 неравенства, получим неравенство

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geq$$

$$\geq\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{b+2c+a}+\frac{4}{c+2a+b},$$

которое после сокращения на 2 и замены в знаменателях дробей $a+b+c$ на 1 превратится в доказываемое неравенство.

Второе решение. Не умаляя общности, можно считать, что $a\geq b\geq c$, тогда $1-c^2\geq 1-b^2\geq 1-a^2$ и, следовательно,

$$\frac{1}{1-a^2}\geq\frac{1}{1-b^2}\geq\frac{1}{1-c^2}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{1-a}-\frac{2}{1+a}=\frac{3a-1}{1-a^2}.$$

Таким образом, нужно доказать неравенство

$$\frac{3a-1}{1-a^2}+\frac{3b-1}{1-b^2}+\frac{3c-1}{1-c^2}\geq 0.$$

Поскольку сумма числителей равна 0, неравенство будет доказано, если мы заменим знаменатели на равные таким образом, что каждая дробь при этом не увеличится. Если $a\geq b\geq\frac{1}{3}\geq c$, то заменим все знаменатели на $1-c^2$, в результате отрицательное слагаемое не изменится, а положительные не увеличатся. Если $a\geq\frac{1}{3}\geq b\geq c$, то заменим все знаменатели на $1-b^2$, тогда положительное и одно из отрицательных слагаемых только уменьшатся, а второе отрицательное слагаемое останется неизменным.

С.Берлов

М1882*. *Изначально у Ани и Бори было по длинной полосе бумаги. На одной из них была написана буква А, на другой Б. Каждую минуту один из них (не обязательно по очереди) приписывает к слову на своей бумажке слово с бумажки другого. Докажите, что через сутки слово с Аниной полоски можно будет разрезать на 2 части и переставить их местами так, что получится то же слово задом наперед.*

Назовем *палиндромом* слово, читающееся одинаково справа налево и слева направо. Докажем индукцией по n, что через n минут слово на любой полоске можно будет разрезать на два палиндрома (один из которых, возможно, пустой). Тогда, если эти палиндромы переставить местами, получится то же слово задом наперед. При $n=0$, 1 это, очевидно, верно. Пусть $n>1$. Без ограничения общности можно считать, что на первом ходу Боря приписал к своему слову А слева, т.е. после первого хода написаны слова А и АБ. Посадим Антона и Валю в этот момент за бумажки, на которых написаны буквы А и В, и попросим их повторять действия Ани и Бори (т.е. если Аня приписывает к началу Борино слово, то Антон приписывает Валино и т.п.). Получившийся процесс длится $n-1$ минуту. Тогда в конце процесса слова Антона и Вали можно разрезать на два палиндрома каждое, а если в них заменить каждую букву В на последовательность АБ, то получатся слова Ани и Бори.

Докажем, что если к палиндрому из букв А и В приписать в конце А и заменить букву В на АБ, то получится палиндром. Действительно, пусть перед первой буквой В стояло x_0 букв А, между первой и второй — $x_1,\ldots$, после последней, k-й буквы В — x_k букв А. Тогда $x_i=x_{k+1-i}$ при любом $1\leq i\leq k$. В измененном слове перед первой буквой Б будет x_0+1 букв А, между первой и второй $x_1+1,\ldots$, после последней, k-буквы Б x_k+1 букв А. Поскольку $x_i+1=x_{k+1-i}+1$, то полученное слово также будет палиндромом.

Пусть, скажем, Антоново слово из букв А и В разрезается на палиндромы S и T. Пусть S' и T' — слова, полученные заменой В на АБ. Тогда S'А и T'А — палиндромы, слово T' начинается с А (T'А = АT''А), и поэтому T'' тоже палиндром. Тогда Анино слово разрезается на палиндромы S'А и T''. Доказательство для Бориного слова аналогично.

Е.Черепанов

М1883. *Решите в целых числах уравнения:*

а) $x^4-2y^2=1$; *б)* $x^2-2y^4=1$;

в) $x^4-8y^2=1$; *г)* $x^2-8y^4=1$.

а) *Ответ*: $(1;0)$, $(-1;0)$.

Знаки x и y можно выбирать произвольно, поэтому достаточно найти неотрицательные решения. Перепишем уравнение в виде

$$(x^2-1)(x^2+1)=2y^2.$$

Пусть $y>0$. Каждый простой множитель входит в разложение числа y^2 четное число раз. Если он не равен 2, то входит в разложение ровно одного из чисел x^2-1, x^2+1. Оба эти числа четны (так как четна правая часть уравнения). При этом в разложении x^2+1 содержится одна двойка (x^2+1 ни при каком натуральном x не делится на 4). Как следствие, в разложении x^2-1 содержится четное число двоек. Таким образом, все простые множители входят в это разложение четное число раз, т.е. x^2-1 является точным квадратом. Но если два точных квадрата отличаются на 1, то меньший из них равен 0. Значит, в действительности $x=\pm1$ и $y=0$.

б) *Ответ*: $(1;0)$, $(-1;0)$.

Пусть $x>0$, $y>0$. Рассуждая, как и выше, сведем уравнение к одной из двух систем

$$\begin{cases} x+1=2z^4, \\ x-1=t^4 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x+1=z^4, \\ x-1=2t^4, \end{cases}$$

где z и t – целые числа.

В первом случае $2z^4-t^4=2$. Поскольку $t=2u$, где u – целое число, имеем $z^4-2\left(2u^2\right)^2=1$. Отсюда вследствие а) $u=0$. Получаем $t=0$, $y=0$. Противоречие.

Во втором случае $z^4-2t^4=2$, откуда $8u^4=t^4+1$, где u – целое число. Но никакое число вида v^2+1 не делится на 4.

Пусть $y=0$. Тогда $x=1$ либо $x=-1$.

в) *Ответ*: $(1;0)$, $(-1;0)$.

Преобразовав уравнение к виду $x^4-2(2y)^2=1$, получаем частный случай а).

г) *Ответ*: $(1;0)$, $(-1;0)$, $(3;1)$, $(-3;1)$, $(3;-1)$, $(-3;-1)$.

Найдем натуральные решения. Рассуждая, как и выше, сведем уравнение к одной из систем

$$\begin{cases} x-1=4z^4, \\ x+1=2t^4 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x-1=2z^4, \\ x+1=4t^4, \end{cases}$$

где z и t – натуральные числа.

В первом случае $t^4-2z^4=1$, откуда вследствие а) $z=0$.

Во втором случае $z^4+1=2t^4$. Рассмотрим более общее уравнение в натуральных числах:

$$X^4+Y^4=2Z^2. \qquad (*)$$

Возводя $(*)$ в квадрат и вычитая из обеих частей $4X^4Y^4$, приходим к равенству

$$u^4-v^4=w^2, \qquad (**)$$

где u и v – положительные, а w – неотрицательное целые числа.

Пусть $w=0$. Тогда $X=Y$, $z=1$, $x=3$.

Докажем, что решений в натуральных числах у уравнения $(**)$ нет. Предположим противное, и пусть u – наименьшее натуральное число, для которого при некоторых натуральных v и w справедливо $(**)$. Легко видеть, что в этом случае числа u, v и w взаимно просты.

Пусть v нечетно. Тогда $u^2=a^2+b^2$, $v^2=a^2-b^2$, где a и b – натуральные числа. Отсюда $(uv)^2=a^4-b^4$, где $a<u$. Противоречие.

Пусть v четно. Тогда $u^2=a^2+b^2$, $v^2=2ab$. Здесь, как и выше, a и b – натуральные взаимно простые числа разной четности. Пусть для определенности b нечетно. Тогда $a=2p^2$, $b=q^2$, где $\text{НОД}(p,q)=1$, $u^2=4p^4+q^4$, откуда $\left(u-2p^2\right)\left(u+2p^2\right)=q^4$. Вследствие нечетности q и взаимной простоты u и a числа $u-2p^2$ и $u+2p^2$ взаимно просты. Поэтому $u-2p^2=r^4$, $u+2p^2=s^4$, откуда $s^4-r^4=(2p)^2$. Но $u^2>q^4\ge s^4$. Следовательно, $u>s^2\ge s$ – в противоречии с минимальностью u.

Есть и другой способ решения уравнения $z^4+1=2t^4$ в целых числах. Рассмотрим более общее уравнение $z^2+1=2y^4$. Это уравнение играет важную роль во многих теоретико-числовых исследованиях; его решением в целых и рациональных числах занимались еще Эйлер и Лагранж. В частности, Эйлер указал, среди других рациональных решений, пары $(y;z)=(1;1)$ и $(y;z)=(13;239)$ и предположил, что иных решений в натуральных числах у уравнения $z^2+1=2y^4$ нет. Это утверждение пытались доказать многие исследователи. Однако лишь в 1942 году норвежский математик Люнгтрен доказал его с помощью методов теории алгебраических кривых.

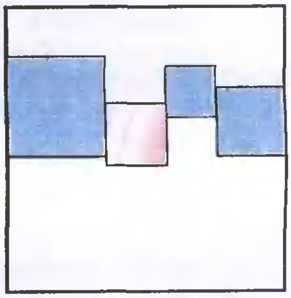
Замечание. Натуральное число y такое, что $1+2y^2$ – полный квадрат, может делиться на сколь угодно высокую степень двойки (как и любого другого натурального числа). Это можно показать с помощью теории уравнений Пелля.

В.Сендеров

М1884. *а) Квадрат разрезан на квадраты, один из которых красный, а остальные синие. Периметр каждого синего квадрата является целым числом. Докажите, что периметр красного квадрата – целое число.*

б) Равносторонний треугольник разрезан на равносторонние треугольники, один из которых красный, а остальные синие. Периметр каждого синего треугольника является целым числом. Докажите, что периметр красного треугольника – целое число.

а) Квадрат Q разрезан на квадраты, один из которых красный, а остальные (не менее трех!) синие. У квадрата Q есть сторона (хотя бы одна), к которой примыкают только синие квадраты. Сумма периметров этих примыкающих квадратов равна периметру квадрата Q, т.е. периметр квадрата Q – целое число.



Найдется цепочка квадратов, соединяющая две противоположные стороны квадрата Q и притом такая, что один из ее квадратов является красным (см. рисунок). Но тогда сумма периметров всех квадратов цепочки равна периметру квадрата Q. Значит, периметр красного квадрата – целое число.

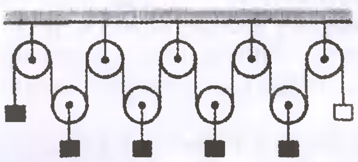
б) Равносторонний треугольник Δ разрезали на равносторонние треугольники, один из которых красный, а остальные (не менее трех!) синие. У треугольника Δ найдется сторона, к которой не примыкает красный треугольник, а значит, к ней примыкают своими сторонами только синие треугольники. Ясно, что сумма периметров этих примыкающих треугольников равна периметру треугольника Δ, т.е. периметр Δ – целое число.

Перекрасим теперь красный и все синие треугольники в черный и белый цвета так, чтобы любые два треугольника, имеющие общий участок границы, были окрашены в разные цвета. При этом неважно, какой цвет приобрел красный треугольник. Важно другое: разница между суммарным периметром всех черных треугольников и суммарным периметром всех белых треугольников равна периметру треугольника Δ.

Отсюда следует, что периметр красного треугольника – целое число.

В.Произволов

Ф1893. *В системе на рисунке блоки легкие, нити легкие и практически нерастяжимые. Оси верхних блоков неподвижны, свободные куски нитей вертикальны. Все грузы, кроме одного – самого правого, имеют массы M, груз справа поменьше, он имеет массу 0,5 M. Вначале нижние грузы удерживали, затем одновременно отпустили. Найдите ускорения всех грузов.*



Численные данные в задаче подобраны так, что получается совсем простое решение. Действительно, грузы, привязанные к осям подвижных блоков, имеют равные массы M и под действием одинаковых сил (это силы тяжести Mg и силы натяжения $2T$) двигаются с одинаковыми ускорениями. Но это еще не все – груз половинной массы имеет точно такое же ускорение (его сила тяжести равна $Mg/2$, а сила натяжения длинной нити составляет T). Обозначив величину этого общего ускорения через a и условно приняв направление ускорения вниз, запишем уравнение для любого из этих тел:

$$Mg - 2T = Ma.$$

Длина большой нити неизменна, поэтому если каждое из указанных тел сместится, например, на 1 см вниз, то крайнее левое тело, масса которого M, вынуждено будет подняться на $4 \cdot 2 \text{ см} + 1 \text{ см} = 9 \text{ см}$ – т.е. величина его ускорения составит $9a$. Тогда для него уравнение движения запишем в виде

$$T - Mg = M \cdot 9a.$$

Решая систему двух уравнений, получим

$$a = -\frac{g}{19}.$$

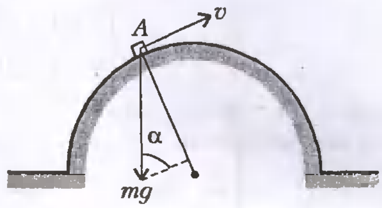
Знак «минус» означает, что общее ускорение пяти грузов направлено не вниз, как мы предположили, а вверх.

Итак, крайний левый груз перетянет все остальные – его ускорение направлено вниз и равно по величине $\frac{9}{19}g$.

З.Рафаилов

Ф1894. *Большая неподвижная горка имеет форму полусферы радиусом R. Тело массой m втаскивают на горку так, что приложенная к телу внешняя сила в каждой точке направлена по касательной к поверхности горки. Какое минимальное количество теплоты может выделиться при перемещении тела из нижней точки в верхнюю? Коэффициент трения на поверхности горки μ.*

У этой задачи «кругленький» ответ – минимальное количество теплоты равно нулю! Действительно, можно тянуть тело таким образом, чтобы оно вовсе не давило на горку, при этом сила трения всюду будет нулевой и тепла не выделится вовсе (а меньше уж точно не получится). Для того чтобы сила реакции была нулевой, нужно для произвольной точки A (см. рисунок) выполнить условие



$$mg\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}.$$

Отсюда

$$v = (gR\sin\alpha)^{0,5}.$$

Проверим – не получится ли тут невыполнимых требований к действующей силе (например, не получится ли для нее бесконечной величины). Для этого найдем ускорение тела, посчитав производную от скорости по времени. Тут есть одна тонкость – мы ведь получили зависимость скорости от угла, а производную нужно считать по времени, но это легко обойти:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta v}{\Delta\alpha}\right)\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right) = \left(\frac{1}{2}(gR)^{0,5}(\sin\alpha)^{-0,5}\cos\alpha\right)\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right).$$

Последний множитель – это угловая скорость, ее легко выразить через скорость тела (оно все время движется по окружности радиусом R):

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v}{R}.$$

Подставляя выражение для скорости, получим окончательно

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{2}g\cos\alpha.$$

Итак, все в порядке, такое ускорение легко обеспечить.

М.Москвитин

Ф1895. *Очень большое тело имеет массу M и удельную теплоемкость c. Какую максимальную механическую работу можно получить при помощи очень маленькой тепловой машины, используя большое тело в качестве нагревателя? А можно ли получить еще больше? Сколько именно? Во всех случаях считать, что температура окружающей среды T_1 не меняется. Начальная температура тела T_2 выше температуры окружающей среды.*

При помощи очень маленькой тепловой машины можно переносить тепло маленькими порциями от нагревателя к холодильнику, получая при этом механическую работу. Тут все понятно, хотя расчет не слишком прост – коэффициент полезного действия по мере уменьшения температуры нагревателя все время уменьшается, при расчете это придется учитывать.

Обозначим количество теплоты, отнимаемое за данный цикл у нагревателя, через q. Это количество может изменяться от цикла к циклу – нас интересует цикл при текущей температуре нагревателя T. Тогда полезная работа за цикл – мы используем наилучший для этих условий цикл Карно – равна

$$A = q\left(1-\frac{T_1}{T}\right).$$

За этот цикл изменение температуры нагревателя составит

$$\Delta T = -\frac{q}{cM}.$$

Теперь выразим работу через изменение температуры нагревателя:

$$A = -cM\Delta T\left(1-\frac{T_1}{T}\right).$$

Это – маленькая величина, а общую работу найдем суммированием таких работ. Суммирование работ очень маленькой тепловой машины можно заменить интегрированием, причем пределы изменения температуры нагревателя будут равны T_2 и T_1:

$$A_{общ} = \int_{T_2}^{T_1} -cM\left(1-\frac{T_1}{T}\right)dT =$$
$$= cM\left(T_2-T_1\right) - cMT_1\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Но если не связываться с маленькой тепловой машиной, можно получить работу и побольше, причем существенно! Дело в том, что при отсутствии требования цикличности проводимых процессов можно перевести в работу даже ВСЕ передаваемое рабочему телу тепло. Например, в процессе изотермического расширения эта работа будет равна

$$A = cM\left(T_2-T_1\right).$$

Если у нас есть очень большая тепловая машина, которая может взять тепло от нагревателя при его (изменяющейся!) температуре и все указанное количество теплоты «переварить» за один раз, то мы получим полное преобразование количества теплоты $cM\left(T_2-T_1\right)$ в работу.

Можно получить и больше – до cMT_2, вовсе не используя внешнюю среду. При этом нам не нужно ничего отдавать холодильнику – ведь мы не связаны условием цикличности, обязательным для обычной тепловой машины.

А.Вениг

Ф1896. *В схеме на рисунке 1 батарейка справа имеет напряжение 5 В, вольтметр справа показывает 6 В. Найдите напряжение второй батарейки и показания остальных двух вольтметров. Все вольтметры одинаковые.*

Потенциал точки *Б* (рис.2) меньше потенциала точки *А* на 1 В. Следовательно, средний вольтметр показывает 1 В, а ток через него течет от точки *А* к точке *Б* и равен $\frac{1\,\text{В}}{R}$, где R – сопротивление вольтметра. Ясно, что ток через левый вольтметр равен сумме токов, текущих через два других вольтметра: $\frac{1\,\text{В}}{R}+\frac{6\,\text{В}}{R}=\frac{7\,\text{В}}{R}$, и он показывает 7 В. Тогда напряжение второй (левой) батарейки равно 6 В + 7 В – 5 В = 8 В.

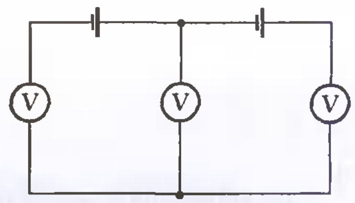


Рис.1

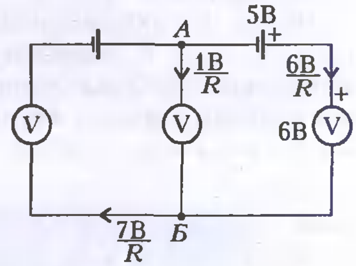


Рис.2

Р.Александров

Ф1897. *«Суточный»*

ТВ-спутник выработал свой ресурс, его заменили другим, запущенным на ту же орбиту, но первый не отключился и продолжает работу. Теперь телевизионные приемники принимают оба сигнала, частоты которых точно совпадают. Найдите «медианный» уровень сигнала на входе приемника (медианным называют уровень, который превышается в половине времени приема). Найдите уровень, ниже которого суммарный сигнал падает в течение 1% времени приема. Уровень сигнала от одного передатчика составляет U_0. Скорости спутников почти одинаковы, периодически срабатывает система коррекции орбиты.

ТВ-спутники используют для вещания на частотах, соответствующих длинам волн порядка нескольких сантиметров. Расстояние между спутниками изменяется на существенно большие величины. Следовательно, можно считать, что сдвиг фаз φ между принимаемыми сигналами все время меняется и может принимать любые значения в пределах от 0 до 2π. Тогда сумма принимаемых сигналов равна

$$U(t) = U_0\cos\omega t + U_0\cos(\omega t+\varphi) =$$
$$= 2U_0\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\omega t+\frac{\varphi}{2}\right),$$

где $2U_0\cos\frac{\varphi}{2}$ – амплитуда принимаемого сигнала.

В половине времени приема превышается уровень, соответствующий углу $\varphi = \pi/2$, т.е. «медианный» уровень сигнала составляет

$$U_{мед} = \sqrt{2}U_0.$$

Маленькие амплитуды суммарного сигнала соответствуют малой окрестности угла φ около значения π радиан, 1% падения сигнала дает $\varphi = \pi \pm \frac{2\pi}{200}$. Тогда амплитуда принимаемого сигнала равна

$$2U_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{200}\right) = 2U_0\sin\frac{\pi}{200} \approx \frac{\pi}{100}U_0 \approx 0{,}03\,U_0.$$

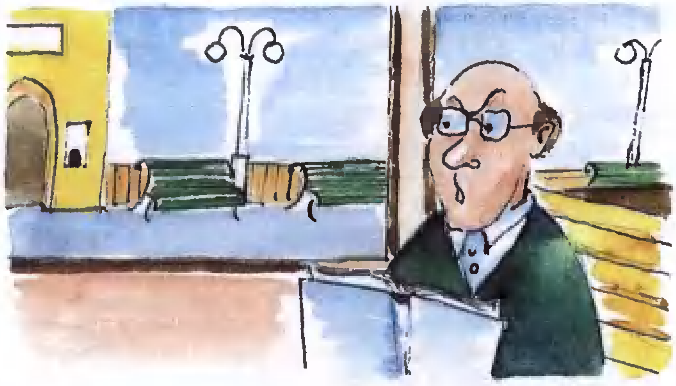
Значит, в течение 1% времени приема амплитуда сигнала падает до $0{,}03\,U_0$ и меньше.

А.Зильберман

Задачи

1. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Подъезжая к станции, они стали подсчитывать скамеечки на привокзальном перроне. У них получилось 15, 12 и 7 скамеечек. Отъезжая от станции, математики принялись считать заново, причем один из них насчитал скамеечек в три раза больше, чем другой. А сколько насчитал третий?

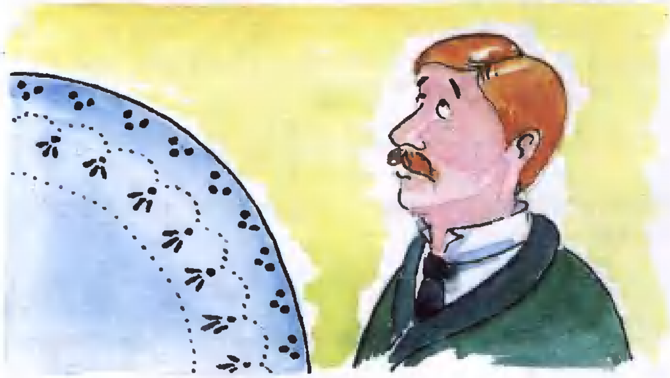
А.Чеботарёв



2. В записи десятизначного числа использованы все 10 цифр. Начав слева, вместо каждой цифры этого числа записали число цифр, которые меньше нее и всех цифр, расположенных справа от нее. Получили 3501210210. Каким было первоначальное число?

В.Произволов

3. — Над чем задумались, Ватсон?
— Я никак не могу понять, как разделить дугу салфетки, имеющей форму четверти круга, на три равные части. Проблема в том, что у меня нет с собой никаких чертежных инструментов!

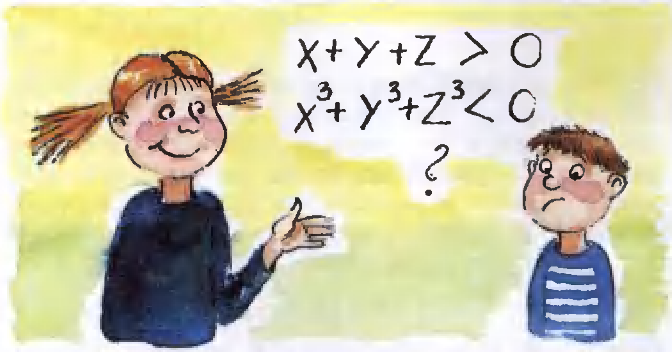


— Они вам не понадобятся, Ватсон. Чтобы справиться с этой задачей, достаточно лишь ваших рук.
— Ох, неплохо было бы иметь еще и голову!
Помогите Ватсону справиться с его задачей.

Р.Сарбаш

4. Три числа таковы, что их сумма больше нуля, а сумма их кубов меньше нуля. Могут ли ровно два из этих чисел быть отрицательными?

В.Сендеров



5. Отметьте 16 клеток шахматной доски так, чтобы не нашлось ни одного остроугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток. А можно ли отметить 17 таких клеток?

И.Акулич

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Насыщенные и ненасыщенные водяные пары

В.МОЖАЕВ

Когда мы говорим о водяном паре, то имеем в виду газ, состоящий из молекул воды, а вовсе не пар, вырывающийся из чайника при кипении и состоящий из мельчайших капелек воды. Те свойства водяного пара, которые мы будет обсуждать в статье, не являются специфическими только для водяного пара, а представляют собой общие свойства всех реальных газов.

Рассмотрим достаточно разреженный газ. Пусть его начальное состояние на pV-диаграмме изображается точкой A (рис.1). Будем медленно сжимать газ при постоянной температуре. Точка, изображающая состояние газа, будет перемещаться вверх по изотерме до точки B. Начиная с точки B давление в системе перестает повышаться и остается постоянным – часть газа переходит в жидкое состояние и образуются две равновесные фазы: газообразная и жидкая. Газ, находящийся в равновесном состоянии со своей жидкостью, называют насыщенным, а давление этого газа называют давлением насыщенного пара. По мере дальнейшего уменьшения объема все большая часть пара переходит в жидкость, и, наконец, в точке C весь пар превращается в жидкость. При дальнейшем сжатии по изотерме CD вещество будет все время оставаться жидким.

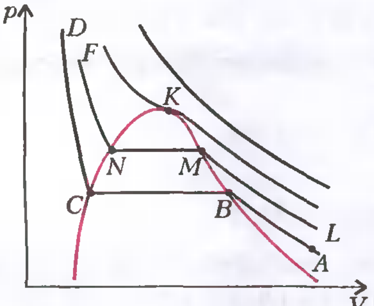


Рис. 1

Изотерма $LMNF$, изображенная на рисунке 1, соответствует более высокой температуре по сравнению с изотермой $ABCD$. С ростом температуры горизонтальный участок, отображающий двухфазное состояние, уменьшается и при некоторой температуре, называемой критической (точка K), исчезает. Выше критической температуры вещество может существовать только в газообразном состоянии. Для воды критическая температура равна $T_к = 375\ °C$.

Как видно из изотермы реального газа, при $T < T_к$ давление насыщенного пара не зависит от объема, занимаемого паром, а зависит только от температуры и рода вещества. С увеличением температуры давление насыщенного пара растет. Если при 0 °С давление насыщенного пара воды равно 4,58 мм рт.ст., то при 100 °С это давление уже составляет 1 атм, или 760 мм рт.ст.

При переходе единицы массы вещества из газообразного состояния в жидкое выделяется количество теплоты r, которое называют удельной теплотой конденсации. При обратном переходе из жидкого состояния в газообразное такое же количество теплоты – его называют удельной теплотой парообразования – поглощается. Предполагается при этом, что переход совершается при постоянной температуре, а следовательно, и при постоянном давлении.

Возникает вопрос: на что идет это тепло? Оказывается, основная часть количества теплоты r идет на увеличение внутренней энергии молекул, перешедших из жидкости в пар. Здесь речь идет о той части внутренней энергии, которая соответствует потенциальной энергии взаимодействия между молекулами. Разность потенциальных энергий молекулы, находящейся в газовой среде и в жидкой, равна той минимальной энергии, которую необходимо сообщить молекуле, чтобы она перешла из жидкости в пар. Кроме этого, еще небольшая часть количества теплоты r идет на работу, которую совершает пар, увеличивая свой объем при постоянном давлении. Удельная теплота парообразования уменьшается с ростом температуры и при критической температуре становится равной нулю.

А теперь перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. *Смесь воды и ее насыщенного пара занимает некоторый объем при температуре $t_1 = 90$ °С. Если смесь нагревать изохорически, то вся вода испаряется при увеличении температуры на 10 °С. Чему равно давление насыщенного водяного пара при температуре t_1, если в начальном состоянии масса воды составляла $\eta = 29\%$ от массы всей смеси? Объемом воды по сравнению с объемом смеси пренебречь.*

Решение удобно начать с рассмотрения конечного состояния, когда вся вода испарилась. В этот момент в сосуде имеется насыщенный водяной пар при температуре $t_2 = 100$ °С. При этой температуре давление насыщенного водяного пара равно атмосферному: $p_{н2} = 10^5$ Па. Обозначим объем, занимаемый паром, через V. Используя уравнение состояния идеального газа, найдем массу пара в сосуде:

$$m_{п2} = \frac{M_в p_{н2} V}{RT_2}.$$

Здесь $M_в$ – молярная масса воды, R – универсальная газовая постоянная, $T_2 = 273 + t_2 = 373$ К. Очевидно, что масса $m_{п2}$ равна суммарной массе воды и пара в начальном состоянии при $t_1 = 90$ °С. Поскольку масса воды составляла $\eta\%$ от массы смеси, то масса пара $m_{п1}$ составляла $(1-\eta)\%$. Поэтому

$$m_{п1} = \frac{(1-\eta)m_{п2}}{100\%} = \frac{(1-\eta)M_в p_{н2} V}{100\% \cdot RT_2}.$$

Из уравнения состояния идеального газа мы можем найти давление этого пара, которое и будет давлением насыщенного водяного пара при температуре t_1:

$$p_{н1} = \frac{m_{п1}}{M_в}\frac{RT_1}{V} = \frac{(1-\eta)p_{н2}T_1}{100\% \cdot T_2} = 0{,}69 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

(здесь $T_1 = 273 + t_1 = 363$ К).

Задача 2. *Вода и водяной пар находятся в цилиндре под поршнем при температуре $t = 110$ °С. Вода занимает при этом $\eta = 0{,}1\%$ объема цилиндра. При медленном изотермическом увеличении объема вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарилась, пар совершил работу $A = 177$ Дж, а объем, который он занимал, увеличился на $\Delta V = 1{,}25$ л. Найдите давление, при котором производился опыт. Сколько воды и пара было в цилиндре в начальном состоянии? Плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3.*

В течение всего изотермического процесса пар оставался насыщенным. Обозначим его давление через $p_н$. Работа, совершенная паром, равна

$$A = p_н \Delta V$$

(здесь мы пренебрегаем объемом, который занимала вода). Отсюда находим давление, при котором производился опыт:

$$p_н = \frac{A}{\Delta V} = 1,416 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Поскольку в данном изотермическом процессе вся вода испарилась, увеличение объема сосуда ΔV вызвано дополнительным паром, который образовался при испарении жидкости. Масса этого пара, а следовательно и масса первоначальной воды, может быть найдена из уравнения состояния идеального газа:

$$m_в = \frac{M_в p_н \Delta V}{RT} = 10^{-3} \text{ кг}.$$

Здесь $M_в = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воды, $R = 8,31$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная, а $T = 273 + t = 383$ К.

Объем, который занимала вода, равен

$$V_в = \frac{m_в}{\rho_в} = 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Этот объем составляет $\eta\%$ от общего объема цилиндра, следовательно, первоначальный объем пара был равен

$$V_п = \frac{V_в(1-\eta)}{\eta} = 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Теперь можно найти массу первоначального пара:

$$m_п = \frac{M_в p_н V_п}{RT} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ кг} = 0,8 \text{ г}.$$

Задача 3. *В парно́й бани относительная влажность воздуха составляла $\varphi_1 = 50\%$ при температуре $t_1 = 100$ °C. После того как температура уменьшилась до $t_2 = 97$ °C и пар «осел», относительная влажность воздуха стала $\varphi_2 = 45\%$. Какая масса воды выделилась из влажного воздуха парной, если ее объем $V = 30$ м^3? Известно, что при температуре 97 °C давление насыщенного пара на 80 мм рт.ст. меньше, чем при температуре 100 °C.*

Найдем первоначальную массу пара в парной. При температуре 100 °C давление насыщенного пара равно одной атмосфере, т.е. $p_{н1} = 10^5$ Па. Поскольку относительная влажность воздуха равна φ_1, давление пара равно

$$p_{п1} = \frac{\varphi_1}{100\%} p_{н1} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

и первоначальная масса пара составляет

$$m_{п1} = \frac{M_в p_{п1} V}{RT_1} = 8,71 \text{ кг}.$$

Здесь $M_в = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воды, $R = 8,31$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная, $T_1 = t_1 + 273 = 373$ К.

При температуре $t_2 = 97$ °C давление насыщенного пара равно $p_{н2} = (760 - 80)$ мм рт.ст = 680 мм рт.ст. = $= 0,895 \cdot 10^5$ Па. Относительная влажность при этой температуре равна φ_2, поэтому давление пара составляет

$$p_{п2} = \frac{\varphi_2}{100\%} p_{н2} = 0,403 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Масса пара при температуре $T_2 = t_2 + 273 = 370$ К равна

$$m_{п2} = \frac{M_в p_{п2} V}{RT_2} = 7,08 \text{ кг}.$$

Выделившаяся масса воды равна разности первоначальной и конечной масс пара:

$$\Delta m = m_{п1} - m_{п2} = 1,63 \text{ кг}.$$

Задача 4. *В цилиндре под поршнем находятся $\nu_1 = 0,5$ моль воды и $\nu_2 = 0,5$ моль пара. Жидкость и пар медленно нагревают в изобарическом процессе так, что в конечном состоянии температура пара увеличивается на ΔT. Сколько тепла было подведено к системе жидкость – пар в этом процессе? Молярная теплота испарения жидкости в заданном процессе равна Λ. Внутренняя энергия ν молей пара равна $U = 3\nu RT$ (R – универсальная газовая постоянная).*

Весь изобарический процесс можно разбить на два участка. На первом участке мы имеем двухфазную систему: вода и ее насыщенный пар. Здесь изобарический процесс происходит при постоянной температуре, а подводимое тепло идет на переход жидкости в пар. Этот процесс продолжается до тех пор, пока вся жидкость не перейдет в насыщенный пар. При этом к системе будет подведено количество теплоты

$$Q_1 = \nu_1 \Lambda.$$

На втором участке пар будет нагреваться и, расширяясь в изобарическом процессе, совершать работу. Это уже будет ненасыщенный пар, который можно считать идеальным газом. По первому началу термодинамики количество теплоты, подведенное на втором участке, идет на увеличение внутренней энергии пара и на работу, совершаемую паром:

$$Q_2 = \Delta U + p\Delta V = 3(\nu_1 + \nu_2) R\Delta T + p\Delta V,$$

где p – давление пара, а ΔV – изменение объема. Поскольку процесс изобарический, то

$$p\Delta V = (\nu_1 + \nu_2) R\Delta T.$$

Тогда

$$Q_2 = 4(\nu_1 + \nu_2) R\Delta T.$$

Полное подведенное количество теплоты равно

$$Q = Q_1 + Q_2 = \nu_1 \Lambda + 4(\nu_1 + \nu_2) R\Delta T = 0,5\Lambda + 4R\Delta T.$$

Задача 5. *Температура воздуха в комнате была $t_1 = 14$ °C, относительная влажность составляла $\varphi_1 = 60\%$. В комнате затопили печь, и температура воздуха повысилась до $t_2 = 22$ °C. При этом некоторая часть воздуха, вместе с содержащимся в нем паром, ушла наружу, и давление в комнате не изменилось. Определите относительную влажность воздуха в комнате при температуре t_2. Давления насыщенного пара при температурах t_1 и t_2 равны $p_{н1} = 1,6$ кПа и $p_{н2} = 2,67$ кПа соответственно.*

Давление пара в комнате при температуре t_1, очевидно, равно

$$p_1 = \frac{\varphi_1}{100\%} p_{н1}.$$

Массу пара, содержащегося в комнате, можно найти по уравнению состояния идеального газа:

$$m_{п1} = \frac{M_п p_1 V}{RT_1},$$

где $M_п$ – молярная масса водяного пара, V – объем комнаты, а $T_1 = t_1 + 273 = 287$ К.

Если воздух, содержащийся в комнате, удалось бы нагреть до температуры t_2 при постоянном давлении (равном внешнему давлению), то этот воздух занял бы объем

$$V_1 = \frac{VT_2}{T_1},$$

где $T_2 = 295$ К. Следовательно, плотность пара была бы

$$\rho_п = \frac{m_{п1}}{V_1} = \frac{M_п p_1}{RT_2}.$$

На самом деле часть пара, содержащегося в воздухе, уйдет наружу, а масса пара, которая останется в комнате, составит

$$m_{п2} = \rho_п V = \frac{M_п p_1 V}{RT_2}.$$

Давление этого пара будет

$$p_2 = \frac{m_{п2}}{M_п}\frac{RT_2}{V} = p_1,$$

а относительная влажность воздуха при температуре t_2 будет равна

$$\varphi_2 = \frac{p_2}{p_{н2}} = \frac{p_1}{p_{н2}} = \frac{\varphi_1}{100\%}\frac{p_{н1}}{p_{н2}} = 0{,}36 = 36\%.$$

Задача 6. *В ресторане «Седьмое небо», расположенном на высоте $H = 300$ м, вода закипает при температуре $t = 99$ °С. Давление воздуха в изотермической атмосфере меняется с высотой h по закону $p(h) = p(0)\exp(-Mgh/(RT))$, где $p(0)$ – атмосферное давление у поверхности, $M = 29$ г/моль – средняя молярная масса воздуха, $g = 9{,}8$ м/с^2, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), $T = 290$ К. Считая, что малые относительные изменения давления и температуры насыщенного водяного пара связаны формулой $\Delta p_н/p_н = C\,\Delta T_н/T_н$, найдите величину константы С. Указание: для $x \ll 1$ можно воспользоваться приближенной формулой $e^{-x} = 1 - x$.*

Поскольку на высоте $H = 300$ м вода закипает при температуре $t = 99$ °С, это означает, что давление насыщенного водяного пара при температуре t равно атмосферному давлению на высоте H. Найдем численное значение показателя экспоненты в формуле зависимости атмосферного давления от высоты при $h = H = 300$ м:

$$\frac{MgH}{RT} = \frac{29\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8\cdot 300}{8{,}31\cdot 290} = 3{,}54\cdot 10^{-2}.$$

Так как это значение много меньше 1, можно воспользоваться приближенной формулой, и тогда атмосферное давление на высоте H будет равно

$$p(300) = p_0\left(1 - 3{,}54\cdot 10^{-2}\right).$$

Итак, мы имеем две близкие точки на «графике» зависимости давления насыщенного пара от температуры: при температуре 99 °С давление насыщенного пара равно $p(300) = p_0\left(1 - 3{,}54\cdot 10^{-2}\right)$, а при температуре 100 °С давление насыщенного пара составляет p_0. Отсюда и находим искомую константу:

$$C = \frac{\Delta p_н/p_н}{\Delta T_н/T_н} = 13{,}2.$$

Упражнения

1. В цилиндре объемом $V = 10$ дм^3 под поршнем находится влажный воздух при температуре $t = 20$ °С и давлении $p = 13{,}3$ кПа. Относительная влажность воздуха $\varphi = 70\%$. Каково будет давление p_1 в цилиндре, если объем при той же температуре уменьшить в 10 раз? Давление насыщенного пара воды при температуре t равно $p_н = 2{,}4$ кПа.

2. В цилиндре под поршнем находится один моль ненасыщенного пара при температуре T. Пар сжимают в изотермическом процессе так, что в конечном состоянии половина его массы оказалась сконденсированной, а объем пара уменьшился в 4 раза. Найдите молярную теплоту конденсации пара Λ, если в указанном процессе от системы жидкость – пар пришлось отвести количество теплоты Q ($Q > 0$). *Указание:* работа, совершаемая в изотермическом процессе ν молями пара при расширении от объема V_1 до объема V_2, равна $A = \nu RT\ln(V_2/V_1)$.

3. В цилиндре под поршнем с пружиной (рис.2) заперты водяной пар и вода, масса которой $M = 1$ г. Температура в цилиндре поддерживается постоянной и равной 100 °С. Когда из цилиндра выпустили часть пара массой $m = 7$ г, поршень стал двигаться. После установления равновесия объем содержимого в цилиндре под поршнем оказался в два раза меньше первоначального. Какая масса пара была в цилиндре и какой объем он занимал в начале опыта? Внешнее давление отсутствует, недеформированная пружина соответствует положению поршня у дна цилиндра, трением между поршнем и стенками цилиндра пренебречь.

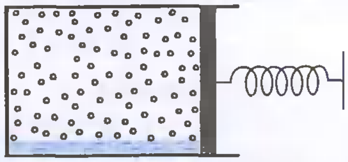


Рис. 2

4. После теплого летнего дождя относительная влажность воздуха у поверхности земли достигла 100%. При этом плотность влажного воздуха (масса пара и воздуха в 1 м^3) оказалась равной $\rho = 1171$ г/м^3, его давление $p = 100$ кПа и температура $t = 22$ °С. Найдите по этим данным давление насыщенного пара $p_н$ при температуре 22 °С. Принять, что молярные массы воздуха и пара равны $M_в = 29$ г/моль и $M_п = 18$ г/моль.

Анкета читателя

Редакция журнала «Квант» благодарит всех читателей, приславших ответы на вопросы нашей анкеты. Мы с большим вниманием ознакомились с присланными материалами и, конечно же, постараемся использовать ваши замечания и пожелания в нашей работе. А теперь – приятные для вас результаты анкетирования.

Главный памятный приз получил

Марковцев Вадим – г.Сергиев Посад.

Бесплатные подписки на журнал «Квант» на второе полугодие 2004 года выиграли

Абдулазимов Саламбек – г.Грозный,
Алимов Андрей – г.Миасс,
Бабичева Татьяна – г.Набережные Челны,
Баскаков Евгений – г.Ревда Мурманской обл.,
Бембель Елена Степановна – г.Тверь,
Габбасов Рауль – г.Уфа,
Габитова Лейсан – г.Набережные Челны,
Галиуллин Марат – г.Азнакаево,
Гридасов Василий Иванович – г.Воронеж,
Денисенок Антон Иванович – г.Гурьевск Калининградской обл.,
Ермоченко Александра Алексеевна – с.Даниловка Кемеровской обл.,
Зайнулин Константин – г.Екатеринбург,
Зарипова Алина – г.Казань,
Захаров Александр Васильевич – г.Витебск,
Зверева Наталья Семеновна – г.Протвино,
Зорин Андрей – г.Харабали,
Зотов Константин – г.Волжский Волгоградской обл.,
Крыскин Николай Захарович – г.Невинномысск,
Марголин Эдуард Максович – г.Великие Луки,

(Продолжение см. на с. 55)

Материалы вступительных экзаменов 2003 года

Вологодский государственный педагогический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант письменного экзамена

(отделение прикладной математики)

1. Сравните между собой число $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100}$ и а) число $\frac{1}{10}$; б) число $\frac{1}{11}$.

2. Решите уравнение

$$\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$3 + \sqrt{x} < x^3 + x^2 + 2x.$$

4. Решите уравнение

$$8^x + 27^x = 2 \cdot 18^x.$$

5. Учащимся, хорошо выступившим на олимпиадах по математике, физике и химии, вручались дипломы первой и второй степени. По математике 10 % участников получили дипломы первой степени и 20 % — второй, по физике — 20 % и 0 %, по химии — 5 % и 25 % соответственно. Когда всех участников олимпиад собрали вместе, выяснилось, что дипломы I степени получили 12 % из них. Сколько участников с дипломами II степени (в процентах) может при этом оказаться?

6. Дан квадрат со стороной 1. В него вписали круг радиуса r_1. В четыре образовавшиеся при этом свободные лунки вписали круги радиуса r_2, а в восемь образовавшихся после этого свободных одинаковых лунок вписали круги радиуса r_3. Найдите r_3.

Вариант устного экзамена

(отделение прикладной математики)

1. Можно ли представить единицу в виде суммы 2003 попарно различных чисел, обратных натуральным?

2. Постройте график функции

$$y = x - \log_x 3.$$

3. Решите уравнение

$$2\sqrt{x} + a\sqrt{x-1} = \sqrt{\left(x+a^2\right)(x+3)}.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания $AB = a$, а высота $SO = b$. В четырехугольной пирамиде S_1ABCD высота $S_1A = b$. Найдите объем общей части этих пирамид.

Публикацию подготовил А.Зейфман

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $6x - x^2 = a$, а x_3, x_4 – корни уравнения $150x - x^2 = b$. Найдите все значения a, b, при которых последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией с положительными членами.

2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{x+3}{x-3}} 4 = 2\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{x+3}\right).$$

3. Фрукты в магазин были доставлены двумя машинами по 60 ящиков в каждой. При этом в 21 ящике были груши, а в остальных ящиках были яблоки. Известно, что в первой машине на один ящик с грушами приходилось в три раза больше ящиков с яблоками, чем во второй машине. Сколько ящиков с грушами было в каждой машине?

4. Четырехугольник $LMNP$ вписан в окружность. Прямые, содержащие стороны LM и NP, пересекаются в точке S (точка L лежит между S и M, а точка P – между S и N). Найдите отношение длин отрезков SL и SP, если известны отношения длин противолежащих сторон четырехугольника: $LM : NP = 2 : 1$, $MN : LP = 1 : 3$.

5. Решите неравенство

$$\frac{|x+4| - \sqrt{3-x} - 1}{|x-4| - \sqrt{x+3} - 1} \le 0.$$

6. Решите уравнение

$$\cos\left(3\operatorname{arctg}(2x)\right) = \frac{1}{2}.$$

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 27 минут. Второй лыжник догнал первого в 18 км от места старта. Дойдя до отметки 27 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого лыжника на расстоянии 1 км от места поворота. Найдите скорости лыжников.

2. Решите неравенство

$$\log_2\left(2^x - 12\right) < 6 - x.$$

3. Найдите сумму всех различных корней уравнения

$$\sqrt{\frac{\pi - x}{x}}\left(\sin 7x - \sin x + \cos 4x\right) = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}+|x+2|}{1-x}<0\,.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $ADKM$ так, что AD лежит на катете AB, AM – на катете AC, вершина K – на гипотенузе BC. Известно, что $AB = 5$, $AC = 12$. Найдите длины сторон прямоугольника, если его площадь равна $40/3$, а длина диагонали меньше 8.

6. Число x удовлетворяет системе

$$\begin{cases}\operatorname{tg}2x=-\dfrac{3}{4},\\ \sin 2x>0.\end{cases}$$

Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}\operatorname{tg}x$ и чему оно тогда равно?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Какую скорость v приобретет тело за время, равное половине времени подъема в высшую точку траектории?

2. На гладкой горизонтальной поверхности по окружности с угловой скоростью ω движется небольшой груз, связанный с вертикальной осью вращения легкой горизонтально расположенной пружиной. Найдите радиус R этой окружности, если известно, что длина недеформированной пружины равна L_0 и возрастает в 2 раза, если пружину расположить вертикально и подвесить на ней груз.

3. Катушка из тонкого провода, концы которой замкнуты накоротко, помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. При изменении магнитной индукции на величину ΔB через катушку проходит заряд q. Найдите радиус a витков катушки, если сопротивление единицы длины провода r. Явлением самоиндукции пренебречь.

4. В закрытом сосуде объемом $V = 0{,}0095$ м^3 содержится одноатомный идеальный газ при давлении $p_1 = 10^5$ Па. Какое давление p_2 установится в сосуде, если газу сообщить количество теплоты $Q = 1430$ Дж? Изменением объема сосуда пренебречь.

5. Определите абсолютный показатель преломления n скипидара, если известно, что при переходе светового луча из воздуха в скипидар углу падения $\alpha = 45°$ соответствует угол преломления $\beta = 30°$. Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным единице.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Тело, брошенное с башни в горизонтальном направлении со скоростью v_0, упало на землю на расстоянии от основания башни в два раза большем, чем ее высота. Найдите высоту башни H.

2. К верхнему основанию свободного однородного прямого вертикально расположенного цилиндра приложена направленная вверх вертикальная сила F (рис.1). С какой силой F_1 во время движения растянут цилиндр в сечении, находящемся на расстоянии x от нижнего основания? Длина цилиндра L. Сопротивлением среды при движении цилиндра пренебречь.

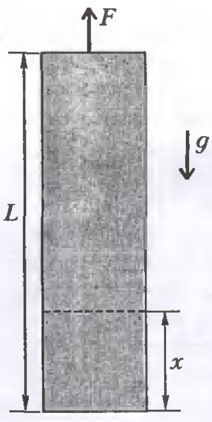


Рис. 1

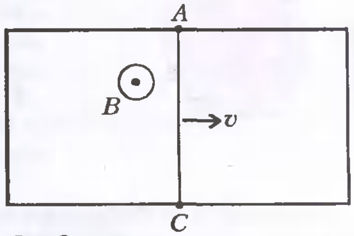


Рис. 2

3. Проволочная рамка в форме прямоугольника с длинами сторон L и $2L$ помещена в однородное магнитное поле с индукцией B, перпендикулярное плоскости рамки (рис.2). По рамке с постоянной скоростью v скользит перемычка AC, изготовленная из такой же проволоки, что и рамка. Найдите разность потенциалов на концах перемычки между точками A и C в тот момент, когда перемычка находится посередине рамки. Явление самоиндукции не учитывать.

4. При работе идеальной тепловой машины Карно рабочее вещество получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 300$ кДж. Температуры нагревателя и холодильника равны $T_1 = 450$ К и $T_2 = 280$ К соответственно. Определите работу A, совершаемую рабочим веществом за цикл.

5. Предмет размером $l = 8$ см надо спроектировать на экран. Какое фокусное расстояние F должен иметь объектив, находящийся от экрана на расстоянии $f = 400$ см, чтобы изображение предмета на экране имело размер $L = 200$ см?

Вариант 3

(олимпиада «Абитуриент-2003», все факультеты)

1. Тело брошено с отвесного обрыва высотой H с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. В течение какого времени t оно будет находиться в воздухе?

2. Деревянный брусок массой M в форме прямоугольного параллелепипеда плавает на поверхности воды. Груз какой массы m нужно положить на брусок, чтобы он целиком погрузился в воду, а груз еще находился над водой? Плотность дерева ρ_1, плотность воды ρ_2.

3. В расположенной в вакууме длинной горизонтальной трубе (рис.3) закреплены два поршня с массами M_1 и M_2, между которыми в объеме V содержится одноатомный идеальный газ при давлении p. Определите максимальные скорости v_1 и v_2 поршней после того, как они будут одновременно освобождены. Масса газа мала по сравнению с массами поршней. Система теплоизолирована. Теплоемкостью трубы и поршней, а также трением поршней о стенки трубы пренебречь.

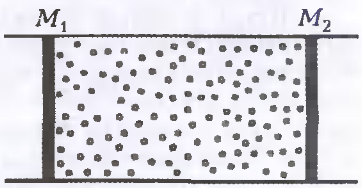


Рис. 3

4. Сколько одинаковых аккумуляторов с внутренним сопротивлением $r = 0{,}004$ Ом каждый нужно соединить последовательно (включение аккумуляторов согласное), чтобы составить батарею, которая, разряжаясь, давала бы на своих зажимах напряжение $U = 115$ В при токе $I = 25$ А, если ЭДС каждого аккумулятора $\mathcal{E} = 1{,}25$ В?

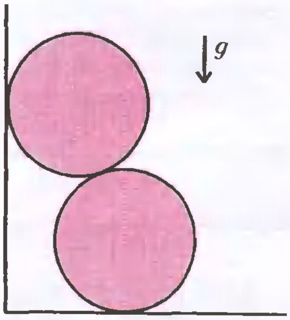


Рис. 4

5. К тонкой собирающей линзе с фокусным расстоянием F вплотную прижато плоское зеркало. На оптическую систему со стороны линзы вдоль главной оптической оси падает параллельный пучок лучей. На каком расстоянии x от линзы пересекутся прошедшие через оптическую систему лучи?

6. Два гладких одинаковых цилиндра радиусом R прислонены к стенке (рис.4). Из-за того что нижний цилиндр чуть-чуть сместился по горизонтальной плоскости вправо, верхний цилиндр начал опускаться по вертикали, и система пришла в движение. Найдите скорость нижнего цилиндра $v_н$ в тот момент, когда верхний цилиндр сместится по вертикали на $R/2$. Трения нет.

7. Точечный заряд Q находится на расстоянии L от центра металлического заряженного шара радиусом R $(L > R)$. Каков заряд Q_1 шара, если известно, что сила взаимодействия между точечным зарядом и шаром равна нулю?

Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкур

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение
$$\sqrt{3}x - \sqrt{6} = \frac{2 - x^2}{\sqrt{2} + x}.$$

2. Вычислите $8^{\frac{\lg 4 + \lg 3}{\lg 2 + \lg 4}}$.

3. Решите неравенство
$$\frac{(x-3)^4 (x-4)}{(x-1)^2 (x-2)(x-5)} \le 0.$$

4. Решите уравнение
$$\sin x - \cos 6x = 0.$$

5. При каких x числа 2^x, 2^{2x}, $2^x + 6$ являются, соответственно, 1-м, 13-м и 37-м членами некоторой арифметической прогрессии?

6. Пустой резервуар начал наполняться через трубу, нагнетающую в него воду с постоянной скоростью. Однако через отверстие в резервуаре вода вытекает из него, также с постоянной скоростью Наполнение резервуара занимает 90 минут. Если бы удалось производительность трубы увеличить на 30%, а скорость вытекания из отверстия уменьшить на 20%, то наполнение резервуара заняло бы 50 минут. Во сколько раз скорость наполнения резервуара через трубу больше скорости вытекания через отверстие?

7. Диагонали KM и LN четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P, $LP = PN = 6$, $KL = 2\sqrt{6}$, $KP = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$, $\angle KMN = 120°$. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

8. Пусть $f(x)$ – нечетная периодическая функция, период которой равен 2. Зная, что $f(x) = x^2 - 3x$ при $0 \le x \le 1$, составьте уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0 = 9{,}7$.

9. Решите уравнение
$$\arccos\left(\frac{-6x-4}{4x+7}\right) = 4\pi - 2\pi x.$$

10. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна 2. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A, B, центр описанной около треугольника ABC окружности и касающейся плоскости $A'B'C'$.

11. Найдите все a, при которых уравнение $2\left||x| - 2\right| = ax - 2a + 1$ имеет ровно три решения.

Вариант 2

1. Вычислите $\sin 960° \cdot \cos 495° \cdot \operatorname{tg}(-840°)$.

2. Решите уравнение
$$3^{1+3x} \cdot 5^{2+2x} \cdot 11^{-x} = 75.$$

3. Решите неравенство
$$x^3 + 231 \le 232x^{-3}.$$

4. Найдите область определения функции
$$y(x) = \log_{3-2x}\left(3^x - 5\right).$$

5. Решите систему
$$\begin{cases} \sqrt{2x-3y}\sqrt{2x+3y} = 8, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$$

6. Найдите наименьшее значение суммы длин трех сторон прямоугольника, площадь которого равна 32.

7. В призме $ABCA'B'C'$ площади двух боковых граней равны 25 и 60, угол между ними 45°, боковое ребро – 5. Найдите объем пирамиды $ABCA'$.

8. Изобразите на координатной плоскости геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенству
$$y \le \sqrt{6|x+6| - (x+6)^2}.$$

9. Решите неравенство
$$(\cos 1{,}5x + \sin 1{,}5x)(11 + 4\cos 2x + 8\sin x) \le -17\sqrt{2}.$$

10. При каких a уравнение $5x^4 + 7ax + 2a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

11. Из пункта A в пункт B с интервалом 10 минут выехали 24 велосипедиста, каждый из которых затратил на весь путь 5 часов. Одновременно с ними из пункта B в пункт A выезжали мотоциклисты, каждый из которых затратил на весь путь одинаковое время. В пути произошло 498 встреч (без учета встреч в пунктах A и B). Какие значения может принимать время нахождения в пути каждого мотоциклиста?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Мальчик, сидящий на вращающейся в горизонтальной плоскости с частотой $n = 6$ об/мин карусели на расстоянии $r = 4$ м от оси вращения, стреляет из пружинного пистолета, направив его ствол под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Оказалось, что пулька относительно земли движется прямолинейно. С какой скоростью v относительно пистолета вылетела пулька?

2. К вертикальной железной стене «прилипла» намагниченная шайба. К шайбе привязали легкую нить и тянут за нее так, что нить все время остается параллельной стене. Когда нить тянут вертикально вверх, шайба начинает двигаться при минимальной силе $F_1 = 1{,}6$ Н ; когда нить тянут вертикально вниз, шайба приходит в движение при $F_2 = 0{,}6$ Н. а) Найдите массу m шайбы. б) С какой минимальной силой F нужно тянуть нить в горизонтальном направлении, чтобы сдвинуть шайбу?

3. На гладком горизонтальном столе покоятся две одинаковые шайбы, соединенные легкой недеформированной пружиной. Одной из шайб сообщили горизонтальную скорость v. Через некоторое время вектор скорости этой шайбы повернулся в горизонтальной плоскости на угол $\alpha = 45°$, а по величине скорости шайб сравнялись. Найдите для этого момента времени скорости шайб v_1 и энергию деформации пружины E.

4. Пустую пластиковую бутылку плотно закрыли в теплой комнате и вынесли на мороз. Через некоторое время бутылка деформировалась, и ее объем уменьшился на $\delta = 10\%$. Какое давление p установилось в бутылке? Температура в комнате $t_0 = 27$ °С, на улице $t = -33$ °С, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

5. При охлаждении $m = 2$ кг воды выделилось $Q = 750$ кДж тепла. При этом половина воды превратилась в лед. Определите начальную температуру t воды.

6. Незаряженные конденсаторы с емкостями C и $2C$ соединили последовательно и подключили к источнику напряжения U (рис.1). а) Найдите заряд q конденсатора емкостью C. б) Определите напряжения U_1 и U_2, которые установятся на конденсаторах после того, как конденсатор емкостью $2C$ отключат от схемы, затем осторожно, не замыкая его обкладок, перевернут на 180° и вновь включат в цепь.

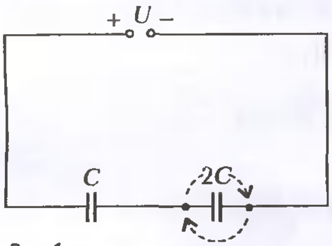


Рис. 1

7. В сеть включены три одинаковые лампы накаливания: две параллельно, а третья последовательно (рис.2). Мощности, выделяемые лампой *3* и лампой *1*, отличаются в $k = 16$ раз. Определите отношение сопротивлений R_3/R_1 этих ламп в данных условиях.

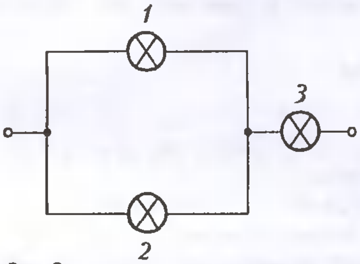


Рис. 2

8. Длинный соленоид содержит $N_1 = 1000$ витков, его индуктивность $L = 0{,}2$ Гн. Вблизи середины соленоида на него плотно намотана короткая катушка из $N_2 = 50$ витков. Выводы катушки подключены к вольтметру, измеряющему эффективное значение переменного напряжения. Какое напряжение U покажет вольтметр, если через соленоид пропустить переменный ток частотой $\nu = 1400$ Гц и амплитудой $I_m = 0{,}05$ А?

9. Тонкая линза дает на экране изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 2$. Во сколько раз k нужно изменить расстояние между предметом и экраном, чтобы с помощью той же линзы получить на экране изображение предмета с увеличением $\Gamma_2 = 3$?

10. При изучении фотоэффекта увеличили интенсивность падающего на катод света, не меняя длины волны (например, уменьшили расстояние между катодом и источником света). Укажите ошибочное утверждение: 1) сила тока фотоэлектронов увеличилась; 2) энергия фотона не изменилась; 3) работа выхода электронов из металла не изменилась; 4) максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов увеличилась; 5) красная граница фотоэффекта не изменилась. Ответ следует пояснить.

Физические постоянные

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2

Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг · К)

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг

Вариант 2

1. Крылатая ракета, атакуя корабль противника, совершает горизонтальный полет на низкой высоте с постоянной по величине скоростью $v_1 = 400$ м/с. Система наведения ракеты устроена так, что вектор ее скорости все время направлен на цель. На расстоянии $L = 800$ м от корабля векторы скоростей ракеты и корабля оказались взаимно перпендикулярными (рис.3). Определите ускорение a ракеты в этот момент, если скорость корабля $v_2 = 72$ км/ч.

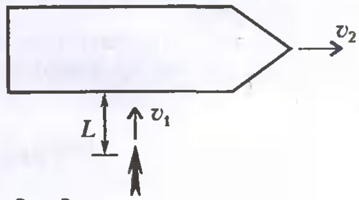


Рис. 3

2. Карандаш поставили вертикально на стол и придавили массивной книгой, придерживая ее в горизонтальной плоскости (рис.4). На какой максимальный угол α можно отклонить карандаш от вертикали до его падения на стол за счет медленного и поступательного перемещения книги? Коэффициент трения между карандашом и столом $\mu_1 = 0{,}5$, между карандашом и книгой $\mu_2 = 0{,}2$. Принять, что действующая на карандаш сила тяжести значительно меньше силы, которая прижимает карандаш к столу.

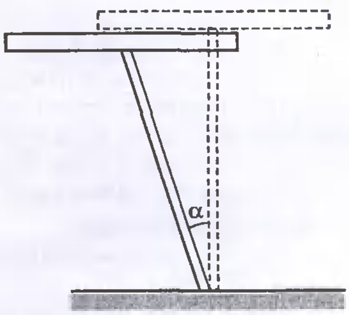


Рис. 4

3. Человек захотел спуститься по веревочной лестнице с высоты $H = 10$ м из неподвижно висящего свободного аэростата массой $m_1 = 400$ кг. Какой должна быть длина l веревочной лестницы, чтобы, ступая на ее последнюю ступеньку, человек коснулся земли? Масса человека $m_2 = 80$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Для измерения влажности воздуха в сосуд, соединенный с манометром и содержащий исследуемый воздух, добавили небольшое количество воды и быстро закрыли пробкой. Через некоторое время часть воды испарилась, и давление в сосуде перестало увеличиваться, достигнув величины, превышающей начальное давление на $\Delta p = 1$ кПа. Какова относительная влажность φ исследуемого воздуха? Давление насыщенного пара в условиях опыта $p_н = 2{,}33$ кПа.

5. В теплоизолированном сосуде находилась вода при 0 °С. Откачиванием паров воду в колбе заморозили. Какая часть δ воды испарилась?

6. Точечные заряды q_1 и q_2 расположены на одной силовой линии однородного электрического поля (рис.5). Известно, что точки, в которых напряженность ре-

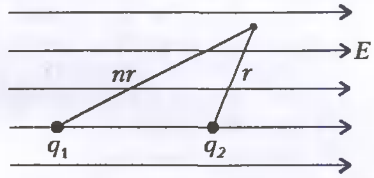


Рис. 5

зультирующего электрического поля равна нулю, расположены в $n = 2$ раза дальше от первого заряда, чем от второго, и не лежат на прямой, проходящей через заряды. Найдите отношение q_1/q_2.

7. В растворе азотнокислого серебра проводится электролитическое покрытие детали серебром. С какой скоростью v (в мм/ч) растет толщина слоя серебра, если плотность тока вблизи поверхности детали $j = 2600$ А/м^2?

8. Заряженный до напряжения U_0 конденсатор емкостью C_0 подсоединили к идеальной катушке. Через некоторое время напряжение на конденсаторе стало равно U, а ток контуре стал равен I. Определите длину λ волны, излучаемой контуром.

9. Луч света переходит из воздуха в стекло (рис. 6). Отрезки AB и BC пройдены лучом за одинаковое время, а величины их проекций на линию границы раздела отличаются в $k = 2,25$ раза. Определите показатель преломления n стекла.

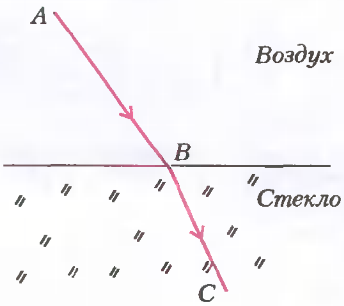


Рис. 6

10. Укажите ошибочное утверждение: 1) интенсивность излучения урана определяется только количеством урана в препарате и не зависит от того, в какие химические соединения он входит; 2) проникающая способность γ-лучей больше, чем α-лучей и β-лучей; 3) радиоактивность сопровождается выделением энергии; 4) радиоактивность представляет собой самопроизвольное превращение одних ядер в другие, сопровождаемое испусканием различных частиц; 5) гамма-излучение сопровождается изменением заряда ядра. Ответ следует пояснить.

Физические постоянные

Удельная теплота парообразования воды при 0 °С $r = 2,5 \cdot 10^6$ Дж/кг

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг

Электрохимический эквивалент серебра $k = 1,12 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл

Плотность серебра $\rho = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м^3

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с

Публикацию подготовили А.Берестов, И.Горбатый, А.Клюшин, И.Кожухов, С.Куклин, А.Овчинников, Т.Олейник, Т.Соколова, И.Федоренко

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На постройке дома первый каменщик проработал 15 дней, затем его сменил второй каменщик и за 8 дней закончил строительство. Если бы эта работа была поручена каждому из них отдельно, то для ее выполнения первому потребовалось бы на 7 дней меньше, чем второму. За сколько дней каждый из них мог бы построить этот дом?

2. Определите, при каких x функция $y = 2 - 2\sqrt{2}\sin x - \cos 2x$ принимает наименьшее и наибольшее значения. Найдите эти значения.

3. Решите уравнение

$$(\log_2 x + \log_x 2 + 2)(\log_2 x - \log_{2x} x) = 6 .$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x\sqrt{x} + 1}{x - 1} < \sqrt{x} + \frac{1}{2} .$$

5. На графике функции $y = (x + 2)^2$ найдите точку, расстояние от которой до точки $M(16; 0)$ будет наименьшим. Чему равно это расстояние?

6. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$(2x - a + 3)^2 = 16(|x| + x - a)$$

имеет ровно два различных корня. Найдите эти корни.

7. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через медиану AM боковой грани ASB и параллельной апофеме ST боковой грани ASC, если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{3}$, а ее высота равна $\sqrt{5}$.

Вариант 2

1. Расстояние между городами A и B равно 150 км. Из города A в город B одновременно отправляются два автомобиля. Первый проезжает в час на 10 км больше второго и прибывает в B на 0,5 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

2. Найдите все корни уравнения

$$\cos 3x - \cos x = \sqrt{3}\sin x ,$$

принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

3. Решите уравнение

$$3^{1+\sqrt{x}} + 3^{3-\sqrt{x}} = 82 .$$

4. Решите неравенство

$$2 + \log_2\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 0 .$$

5. Какая наименьшая длина может быть у отрезка, середина которого лежит на графике функции $y = \frac{5}{x} + \frac{4x}{3}$, а концы – на осях координат?

6. Определите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y + |y| = 4\sqrt{x}, \\ a(y - 4) = x - 3 \end{cases}$$

имеет два различных решения. Укажите эти решения при каждом из найденных значений a.

7. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан в сферу радиуса R. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, которая проходит через диагональ AC_1, параллельна диагонали основания BD, наклонена к плоскости основания под углом 60° и образует с диагональю BD_1 угол, равный $\arcsin(1/4)$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Напишите формулировку закона всемирного тяготения и его аналитическое выражение. Укажите единицы измерения входящих в него физических величин.

2. Точка движется вдоль оси x со скоростью, проекция которой v_x как функция времени представлена на рисунке 1. Определите путь, пройденный точкой за первые пять секунд.

3. Во сколько раз энергия фотона рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda_1 = 0,1$ нм больше энергии фотона видимого света с длиной волны $\lambda_2 = 0,4$ мкм?

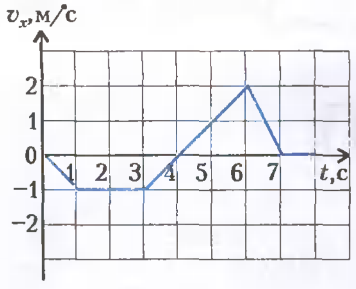


Рис. 1

4. На рисунке 2 показаны предмет AB и его изображение A_1B_1, полученное с помощью линзы. Определите построением положение линзы и ее главной оптической оси.

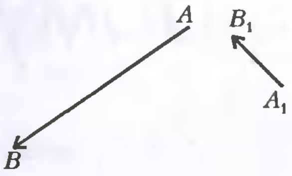


Рис. 2

5. На pV-диаграмме изображен цикл, совершаемый двумя молями азота, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.3). Известно, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме, а средние квадратичные скорости молекул азота равны $v_1 = 300$ м/с в точке *1* и $v_3 = 700$ м/с в точке *3*. Определите работу, совершаемую газом за цикл.

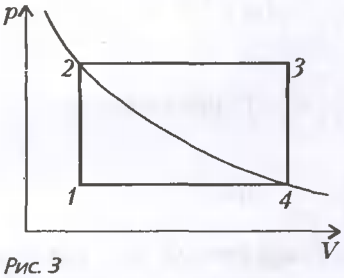


Рис. 3

6. Определите максимальную амплитуду гармонических колебаний системы (рис.4), состоящей из двух брусков и двух невесомых пружин, при которой бруски будут совершать колебания по горизонтальной плоскости без проскальзывания относительно друг друга. Жесткости пружин $2k$ и $4k$. Масса нижнего бруска m, верхнего $2m$, коэффициент трения между брусками μ. В положении равновесия пружины не деформированы. Трение между нижним бруском и плоскостью отсутствует.

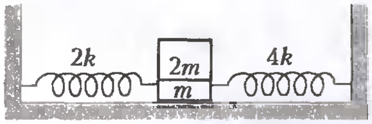


Рис. 4

7. На концах и в середине невесомого жесткого вертикального стержня длиной L укреплены маленькие шарики *1*, *2*, *3* равного объема, массы которых m, $2m$ и $3m$, а заряды $+3q$, $+2q$, $+q$ соответственно (рис.5). В пространстве, где находятся шарики, создано однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Какую скорость будут иметь шарики в момент падения их на горизонтальную поверхность? Силами трения и влиянием индуцированных на горизонтальной поверхности зарядов пренебречь.

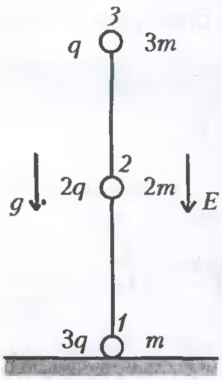


Рис. 5

Вариант 2

1. Напишите формулировку закона Архимеда для жидкостей и газов и его аналитическое выражение. Укажите единицы измерения входящих в него физических величин.

2. Прямоугольный контур $ABCD$ перемещается поступательно в магнитном поле тока, текущего по прямолинейному длинному проводнику (рис.6). Покажите на рисунке направление результирующей силы Ампера, действующей на контур, если он удаляется от проводника.

3. Движение материальной точки вдоль оси x описывается уравнением $x = 0{,}06\cos 0{,}5\pi t$ (м). Масса точки $m = 0{,}1$ кг. Найдите изменение импульса Δp_x материальной точки за интервал времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 5$ с.

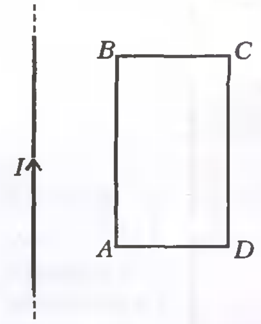


Рис. 6

4. Какова наименьшая частота света, при которой еще наблюдается фотоэффект, если работа выхода электрона из металла $A = 3{,}3 \cdot 10^{-19}$ Дж?

5. Определите силу, действующую на вертикальную стенку со стороны клина (рис.7), если по нему соскальзывают два бруска, массы которых $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, а коэффициенты трения между брусками и поверхностью клина $\mu_1 = 0{,}1$ и $\mu_2 = 0{,}2$. Угол при основании клина $\alpha = 45°$. Трением между горизонтальной поверхностью и клином пренебречь.

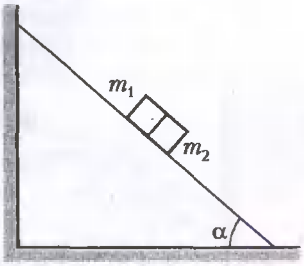


Рис. 7

6. Температура десяти молей идеального газа меняется по закону $T = \alpha V^2$, где $\alpha = 2$ К/м^6. Найдите работу, совершенную газом при увеличении объема от $V_1 = 30$ дм^3 до $V_2 = 50$ дм^3.

7. Вертикальная часть тонкой открытой с обоих концов L-образной трубки заполнена на длину L жидкостью и удерживается с помощью клапана K (рис.8). Найдите, через какое время t после открытия клапана вся жидкость вытечет из горизонтальной части трубки, длина которой $2L$. Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь. При течении жидкость заполняет все сечение трубки.

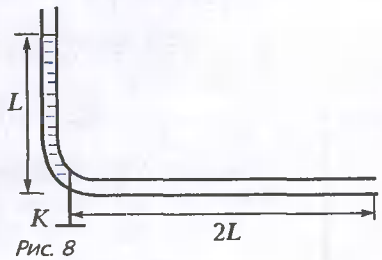


Рис. 8

Публикацию подготовили Л.Паршев, Ю.Струков

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, полу-

(Продолжение см. на с. 34)

Магия формул

Многие считают, что математики – это люди, занятые скучными и длинными вычислениями. Это, конечно, заблуждение, хотя, разумеется, иногда математикам и приходится вычислять – точнее, выводить формулы.

Здесь мы приведем без доказательства ряд формул и соотношений между числами. Почти все они были выведены выдающимися математиками и часто представляли собой крупное событие в истории науки. В каждой из них заключена некая тайна. Впрочем, убедитесь в этом сами.

Формулы с радикалами

Эта группа формул содержит наиболее простые соотношения. Попробуйте их доказать самостоятельно.

1. $\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{10}$.

2. $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

3. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

4. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$.

5. $\sqrt{12\sqrt[3]{2}-15}+2\sqrt{3\sqrt[3]{4}-3}=3$.

6. $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$.

Формула 6 была доказана гениальным индийским математиком Рамануджаном (о некоторых еще формулах Рамануджана мы поговорим дальше).

Тригонометрические формулы

Источником бесчисленного количества красивых формул является тригонометрия. Вот несколько ярких примеров.

7. $\cos\frac{2\pi}{2m+1}+\cos\frac{4\pi}{2m+1}+\ldots+\cos\frac{2m\pi}{2m+1}=-\frac{1}{2}$.

8. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+1}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2m+1}\ldots\operatorname{tg}\frac{2m\pi}{2m+1}=$

$=(-1)^m(2m+1)$.

9. $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{11}+4\sin\frac{2\pi}{11}=\sqrt{11}$.

10. $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

11. $\cos\frac{\pi}{2m+1}\cos\frac{2\pi}{2m+1}\ldots\cos\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{1}{2^m}$.

При всех допустимых x справедливы следующие формулы.

12. $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

13. $\cos x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

14. $\sum\limits_{k=0}^{2m}\operatorname{tg}\left(x+\frac{k\pi}{2m+1}\right)=(2m+1)\operatorname{tg}(2m+1)x$.

15. $\prod\limits_{k=0}^{2m}\operatorname{tg}\left(x+\frac{k\pi}{2m+1}\right)=(-1)^m\operatorname{tg}(m+1)x$.

16. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin nx$.

Рамануджан доказал также такие два тождества.

17. $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5-3\sqrt[3]{7}\right)}$.

18. $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3\sqrt[3]{9}-6\right)}$.

Формулы для числа π

Числу π с древнейших времен и до наших дней математики уделяли особое внимание. Каждая новая формула знаменовала собой продвижение в познании природы этого числа. Вот несколько формул, представляющих π в виде сумм рядов и бесконечных произведений.

19. $\pi=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}}_{n\ \text{радикалов}}$.

(Ариабхата, VI в.)

20. $\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$

(Виет)

21. $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ (Лейбниц)

22. $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ (Эйлер)

23. $\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots$ (Эйлер)

24. $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\ldots=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!}$, (Валлис) где $m!!$ — произведение всех чисел, не превосходящих m и той же четности, что m.

Существуют также представления числа π в виде бесконечных цепных дробей специального вида. Например, таких.

25. $$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\ldots}}}}}$$ (Броункер)

26. $$\frac{\pi}{2}=1+\cfrac{2}{3+\cfrac{1\cdot 3}{4+\cfrac{3\cdot 5}{4+\cfrac{5\cdot 7}{4+\cfrac{7\cdot 9}{4+\ldots}}}}}.$$ (Эйлер)

Число e

Основание натуральных логарифмов — число e — определяется как предел: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Это число, как и число π, играет огромную роль в математике. Вот некоторые связанные с ним формулы.

27. $$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

И вообще, при любом x

28. $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Известно и представление числа e в виде бесконечной цепной дроби:

29. $$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

Содружество чисел e и π

Одной из самых замечательных формул математического анализа является формула Стирлинга, показывающая, как растут факториалы:

30. $$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Знак приближенного равенства здесь означает, что отношение левой части равенства к правой стремится к 1 при $n\to\infty$. В этой формуле «сошлись» целые числа и числа e и π.

А вот еще одна великая формула, открытая Эйлером:

31. $$e^{i\pi}=-1.$$

Здесь e и π сошлись с мнимой единицей — числом i. Эта формула — частный случай более общей, соединяющей показательную функцию с тригонометрическими:

32. $$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

И наконец, еще одно соотношение:

33. $$i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Мнимая единица в степени i — действительное число! Правда, здесь нужны некоторые разъяснения. Дело в том, что функция $w=i^z$ при каждом $z\ne 0$ имеет бесконечно много значений, так что $e^{-\frac{\pi}{2}}$ — лишь одно из значений $i^i=e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, где $k\in\mathbf{Z}$.

* * *

В заключение — еще три формулы, открытые Рамануджаном.

34. $$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(4k+1)\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^3=\frac{2}{\pi}.$$

35. $$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1\ldots}}}}=\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)e^{\frac{2\pi}{5}}.$$

36. $$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots$$
$$\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{e\pi}{2}}.$$

В последней, поистине загадочной, формуле ни сумма ряда, ни бесконечная цепная дробь по отдельности не выражаются через e и π!

* * *

Мы показали вам лишь маленький кусочек огромного мира формул. Одни из них вам уже встречались. С другими же вам еще только предстоит познакомиться.

А.Егоров

(Начало см. на с. 26)

чить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой требуется объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

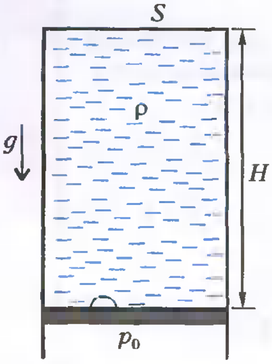


Рис. 1

1. Трубка, площадь сечения которой S, закрыта сверху и заполнена жидкостью плотностью ρ на высоту H (рис.1). Внизу трубка перекрыта легким поршнем, к которому прилип пузырек воздуха объемом V. Атмосферное давление p_0. На какое расстояние x сдвинется поршень, если пузырек оторвется и всплывет вверх? Ускорение свободного падения g. Температуру считать постоянной.

2. Тело массой m налетает на покоящееся тело со скоростью v. Известно, что после упругого удара налетающее тело имеет скорость, равную u и направленную перпендикулярно исходной. Найдите массу M второго тела.

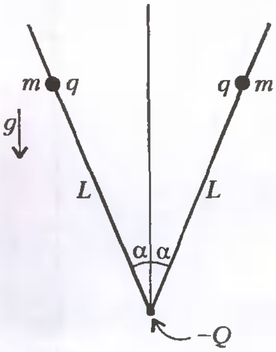


Рис. 2

3. На двух спицах, наклоненных под углом α к вертикали, надеты одинаковые бусинки, каждая из которых имеет массу m и заряд q (рис.2). Вначале бусинки находятся в равновесии на одинаковой высоте. Найдите в этом положении расстояние L от вершины угла, образованного спицами, если известно, что ускорение свободного падения равно g. Затем, удерживая бусинки, в вершину угла помещают точечный заряд противоположного знака ($-Q$). Найдите минимальную величину Q, при которой нижний заряд притянет к себе бусинки, если их отпустить. Считать, что бусинки все время движутся симметрично, а их размерами можно пренебречь. Трения нет.

4. Оцените, сколько времени продолжается разгон ракеты с космонавтом, запускаемой на орбиту вокруг Земли.

5. Два одинаковых груза связаны тонкой проволочкой. Грузы стоят на опорах на разной высоте. Если осторожно дернуть за проволочку вверх, оба груза поднимаются. Если же сделать более резкий рывок, проволочка рвется. Опыт показывает, что при постепенном нарастании силы рывка разрыв обычно происходит с той стороны, где привязан верхний груз. Объясните результат эксперимента.

Вариант 2

1. Вольтметр, подсоединенный к источнику тока, показывает напряжение U_1. Если присоединить параллельно второй такой же вольтметр, то оба показывают напряжение U_2. Найдите внутреннее сопротивление источника, если сопротивление каждого вольтметра R.

2. Цилиндр длиной L вначале открыт в атмосферу и заполнен воздухом при температуре T_0. Затем цилиндр закрывают поршнем и охлаждают. Поршень останавливается на расстоянии $h < L$ от дна (рис.3). Когда температура вернулась к начальному значению, поршень остановился на расстоянии $H > h$ от дна. Найдите, до какой температуры T был охлажден воздух в цилиндре, если величину силы трения при движении поршня можно считать постоянной.

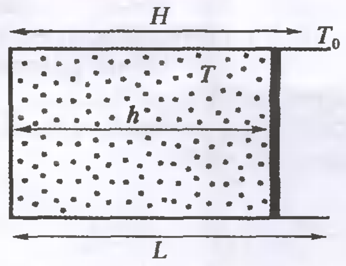


Рис. 3

3. Тело массой m, которое может двигаться по горизонтали без трения, находится между двумя стенками, к которым прикреплено пружинами (рис.4). Левая пружина имеет упругость k и рвется при растяжении ее силой T, правая – соответственно, $3k$ и $2T$. В исходном состоянии пружины не деформированы. Какую минимальную скорость следует придать телу, чтобы порвалась сначала левая пружина, а затем правая?

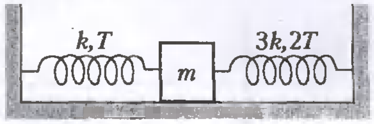


Рис. 4

4. Оцените потенциал, до которого заряжен электроскоп (рис.5), если его лепестки, масса которых около 1 г, разошлись на заметный угол.

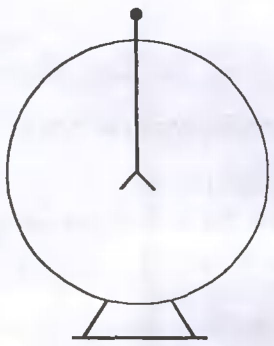


Рис. 5

5. Пустую алюминиевую банку из-под напитка, к ключу которой прикреплен груз, наполняют холодной водой. Затем стеклянный сосуд наполняют горячей водой и опрокидывают туда банку вверх дном. Банка тонет, но через некоторое время всплывает. Объясните результат эксперимента.

Вариант 3

1. Прямоугольный параллелепипед составлен из двух кусков стекла с различными показателями преломления n_1 и n_2 (рис.6). Граница раздела наклонена к вертикали под малым углом α. Горизонтальный луч света входит в левый торец параллелепипеда и выходит из правого. Найдите угол, на который отклонится выходящий луч от горизонтали.

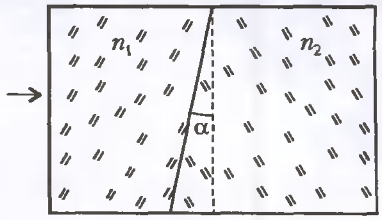


Рис. 6

2. Цилиндр с газом, расположенный вертикально, разделен на три неравные части поршнями одинаковой массы (рис.7). Вначале давления и температуры во всех отсеках равны, а поршни удерживают в неподвижном состоянии. Затем поршни отпускают, а температуры в отсеках изменяют так, чтобы пор-

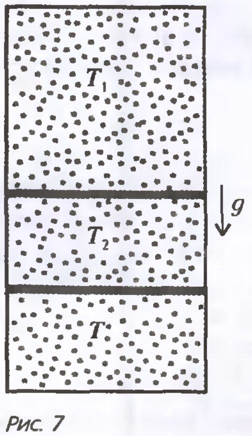


Рис. 7

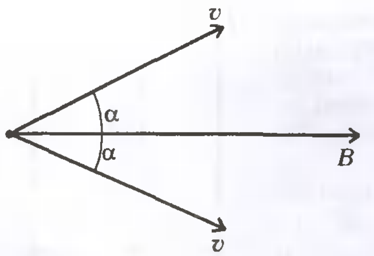


Рис. 8

шни находились в равновесии в прежних положениях. Найдите конечную температуру T в нижнем отсеке, если известны температуры T_1 и T_2 в двух остальных. Трением после отпускания поршней можно пренебречь.

3. В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ из одной точки начинают двигаться два электрона с одинаковыми по величине скоростями v, причем вектор индукции лежит в одной плоскости с векторами начальных скоростей и делит пополам угол между ними, равный 2α (рис.8). Найдите, на каком расстоянии от исходной точки электроны встретятся. Взаимодействием между частицами пренебречь. Масса электрона m, заряд e.

4. Оцените максимальное число приседаний, которое человек может сделать в течение минуты, не используя каких-либо приспособлений. (В книге рекордов Гиннесса регистрируется чемпион в этом виде.)

5. Легкий шарик располагается в верхней части стеклянной наклонной трубки, закрытой с обоих концов и заполненной водой. Однако если трубку закрутить, не меняя ее наклона, шарик смещается вниз. Объясните результат эксперимента.

Публикацию подготовили Г.Меледин, А.Ершов

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа n определена функция $f_n(x) = \lg\left(3x^2 + 2nx\right)$.

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $g(x) = \left|10^{f_3(x)} - 9\right|$.

в) При каких значениях a уравнение $g(x) = a$ имеет только два решения?

2. Решите неравенство

$$3^{2x} \le \left((0,6)^x + 2\right) \cdot 25^x .$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{1 + 4\sin x \cos x} - \sin x = \cos x ,$$

удовлетворяющие неравенству $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.

4. Меньшая сторона прямоугольника равна 6. На каждой его стороне лежит вершина ромба, площадь которого 51. Расстояние от вершины острого угла ромба до ближайшей вершины прямоугольника равно 1. Найдите другую сторону прямоугольника.

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник с прямым углом C и катетами AC и BC, равными 8 и 6 соответственно. Боковое ребро SA равно AB и перпендикулярно основанию пирамиды. Точки M и N – середины сторон AC и CB. Найдите площадь сечения, проходящего через эти точки и параллельного SA.

Вариант 2

1. Для каждого натурального числа n определена функция $f_n(x) = \ln\left(x^2 - 2nx\right)$.

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $g(x) = \left|e^{f_2(x)} - 5\right|$.

в) При каких значениях b уравнение $g(x) = b$ имеет только два решения?

2. Решите неравенство

$$9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} \le 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1} .$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2 + \cos x} = 0 ,$$

удовлетворяющие неравенству $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$.

4. Длины сторон прямоугольника равны 6 и 16. На каждой его стороне лежит вершина ромба. Расстояние от вершины острого угла ромба до ближайшей вершины прямоугольника равно 1. Найдите площадь ромба.

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой BD, равной 10, и катетом BC, равным 8. Боковое ребро AC равно CD и перпендикулярно основанию пирамиды. Точки K и E – середины сторон BC и BD. Найдите площадь сечения, проходящего через эти точки и параллельного AC.

Публикацию подготовили Н.Подходова, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им.К.Э.Циолковского (МАТИ)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{\log_2 12}{\log_{24} 2} - \frac{\log_2 3}{\log_{96} 2} .$$

2. Найдите наименьший корень уравнения

$$\left|2|x+1| - 4\right| = |x+2| .$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{3x^2 - 7x - 4}{3x^2 - 8x - 3} - 1\right)\sqrt{11x - 12 - 2x^2} \ge 0 .$$

4. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором множество решений неравенства

$$5\left(\sqrt{38 - 5x} - ax\right) \ge 25 - 13a$$

образует отрезок длины $9/5$.

5. Решите уравнение

$$4\left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) + 5(\cos x - \sin x)(1 + \sin 2x)^2 - 3\cos 2x = 0.$$

6. В угол треугольника вписаны две касающиеся окружности радиусов r и R. Третья сторона этого треугольника равна a и касается только большей окружности. Общая внутренняя касательная к окружностям разбивает треугольник на треугольник и четырехугольник, площади которых относятся как 2 : 9. Найдите отношение $r : a$, если $r : R = 16 : 25$.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\frac{\log_2 \frac{3}{4}}{\log_{24} 2} - \frac{\log_2 3}{\log_6 2}.$$

2. Найдите наибольший корень уравнения

$$|2x - 21| = x^2 + x + 3.$$

3. Решите неравенство

$$\left(x - \frac{2x+4}{2x-5}\right)\sqrt{10x - 3 - 3x^2} \geq 0.$$

4. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором множество решений неравенства

$$3\left(\sqrt{3x+26} - ax\right) \geq 17a + 9$$

образует отрезок длины $8/3$.

5. Решите уравнение

$$4\left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) + 3(\cos x + \sin x)(1 - \sin 2x)^2 - 3\cos 2x = 0.$$

6. В угол трапеции вписаны две касающиеся окружности радиусов r и R, а две другие стороны трапеции, из которых боковая сторона равна a, касаются большей окружности. Общая внутренняя касательная к окружностям разбивает трапецию на треугольник и пятиугольник, площади которых относятся как 1 : 12. Найдите отношение $r : a$, если $r : R = 1 : 4$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. По графику зависимости скорости от времени (рис.1) определите среднюю скорость движения тела на первой половине пути.

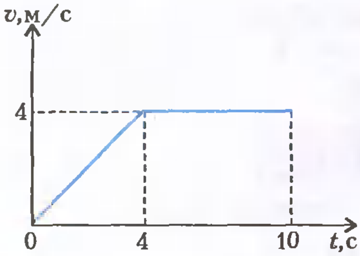


Рис. 1

2. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин 200 $см^2$ и расстоянием между ними 1 мм подключили к источнику постоянного напряжения. На пластинах при этом появился заряд 0,2 мкКл. Не отключая от источника, конденсатор заполнили жидким диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2$. На сколько изменилась энергия конденсатора?

3. Первичная обмотка трансформатора имеет 11000 витков, она включена в сеть переменного тока, напряжение в сети 220 В. К вторичной обмотке подключена нагрузка, которая потребляет мощность 40 Вт при силе тока во вторичной цепи 2 А. Найдите число витков вторичной обмотки, если ее сопротивление 1 Ом.

4. С идеальным газом в количестве 1 моль проводят цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Отношение давлений на изобарах равно $5/4$, отношение объемов на изохорах равно $6/5$. Постройте график этого цикла в координатах p, V и найдите работу газа за один цикл, если разность максимальной и минимальной температур равна 100 К.

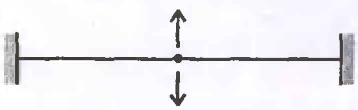


Рис. 2

5. Невесомая струна (рис.2) длиной 1 м натянута с силой 10 Н. Груз массой 0,1 кг закреплен посередине струны. Найдите период малых поперечных колебаний струны. Силу натяжения струны считать постоянной, силу тяжести не учитывать.

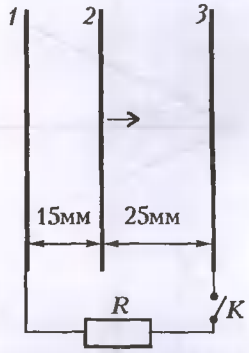


Рис. 3

6. Три металлические пластины (рис.3) одинаковы, их размеры гораздо больше расстояния между пластинами. Пластина *2* заряжена, напряженность ее электрического поля равна 10^4 В/м. Ключ K замыкают. После установления равновесия пластину *2* передвигают на 15 мм по направлению к пластине *3*. Найдите силу тока через резистор сопротивлением R = 60 Ом сразу после этого.

Физические постоянные

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К)

Вариант 2

1. В ходе изобарного процесса температура газа повысилась на 200 К, при этом плотность газа изменилась в 1,5 раза. Найдите начальную температуру газа.

2. В колебательном контуре происходят гармонические колебания. В некоторый момент времени ток в контуре достигает максимального значения. Сравните энергию магнитного поля катушки индуктивности с энергией электрического поля конденсатора через $1/6$ часть периода колебаний после этого момента.

3. На длинной наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом, находятся брусок и тележка (рис.4). Тележку сначала удерживают, а затем отпускают. Через 1 с после этого расстояние между тележкой и бруском становится равным 1 м. Найдите коэффициент трения бруска о наклонную плоскость, если тележка катится не встречая сопротивления.

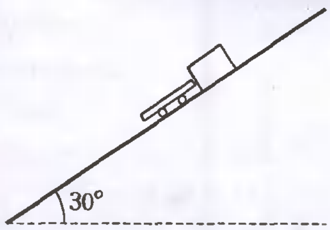


Рис. 4

4. К источнику ЭДС подсоединен резистор сопротивлением 50 Ом. Амперметр подключают к резистору сначала последовательно, а затем параллельно. Показания амперметра в обоих случаях совпадают. Найдите внутреннее сопротивление источника, если амперметр имеет сопротивление 10 Ом. Сопротивлением проводов пренебречь.

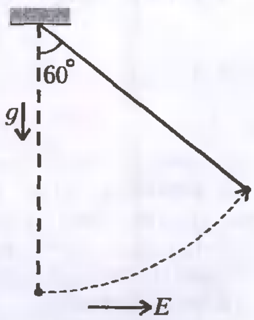


Рис. 5

5. Заряженный шарик подвешен на невесомой нерастяжимой нити в однородном электрическом поле, силовые линии поля направлены горизонтально (рис.5). Масса шарика m. В положении равновесия нить составляет угол 60° с вертикалью. Шарик отводят в нижнюю точку и отпускают. Найдите силу натяжения нити, когда шарик будет проходить положение равновесия.

6. Короткий импульс лазерного излучения с энергией 7,5 Дж в виде узкого параллельного пучка падает на зеркальную пластинку с коэффициентом отражения 0,8. Угол падения света равен 30°. Рассматривая свет как поток фотонов одинаковой частоты, найдите импульс, переданный пластинке.

Физические постоянные

Скорость света в вакууме $c = 3\cdot 10^8$ м/с

Публикацию подготовили М.Кузьмин, Т.Медина, А.Миронов, В.Мирошкин, Л.Муравей, Г.Никулин

Российский государственный университет нефти и газа им.И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите до числового значения

$$\frac{\sqrt[3]{36b^{2/3}}-4}{\sqrt[3]{6b}+2}-\sqrt[3]{6b^{1/3}}.$$

2. Решите уравнение $4\sqrt{x+6}=-x-1$.

3. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 105,5. Найдите первый член прогрессии, если ее знаменатель равен 1,5.

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$|x-1|(x-2)>0.$$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$0,25^{12x+5}\cdot 16^x<0,0625.$$

6. Вычислите $10^{2\lg 6}\cdot \lg^2\sqrt[4]{10}$.

7. Найдите наименьшее положительное число x, при котором функция $y=\sin(x+0,2)\pi$ принимает свое наибольшее значение.

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$14\cos 15x-3\sin 30x=0.$$

9. К графику функции $y=a\sqrt{x}$ $(a\neq 0)$ проведена касательная в точке M. Прямая, параллельная этой касательной, пересекает график в точках с абсциссами 3,2 и 5. Найдите абсциссу точки M.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{(x-156)}7>\log_x 49\ ?$$

11. Около прямоугольника $ABCD$ площади 14,4 описана окружность радиуса 6. Найдите радиус окружности, которая касается описанной окружности изнутри в точке B и касается диагонали AC.

12. Высота правильной четырехугольной пирамиды пересекает сферу вписанного в пирамиду шара в точке M, лежащей внутри пирамиды. Через сторону основания пирамиды и точку M проведена плоскость. Площадь сечения шара этой плоскостью равна 2, косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен 0,2. Найдите площадь поверхности вписанного шара.

Вариант 2

1. Упростите и вычислите при $a=\sqrt{3},\ y=1+\sqrt{5}$

$$\left(\frac{1}{y\sqrt{3}+a}+\frac{2a}{3y^2-a^2}\right):\frac{1}{3y^2-\sqrt{3}ay}-\sqrt{3}y+3.$$

2. Решите уравнение $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$.

3. Произведение 18-го и 27-го членов геометрической прогрессии равно 9,4. Найдите произведение 9-го и 36-го членов этой прогрессии.

4. Найдите наибольшее целое решение уравнения

$$\frac{|3x+7|}{3x+7}=-1.$$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$0,7^{x-8,5}<7^{\frac{x-8,5}{7}}.$$

6. Вычислите $\dfrac{\log_2 66}{\log_6 66}-\log_2 3$.

7. Вычислите $\dfrac{\cos 40^\circ-3\sin 130^\circ}{\cos 140^\circ}$.

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$2\sin 19x\sin 4x=0,5-\cos 23x.$$

9. Прямая касается графика функции $y=\dfrac{0,064}{x}$ в точке M и графика функции $y=x^2$ в точке N. Найдите абсциссу точки M.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{42}}\left(\log_x\sqrt{42-x}\right)>0\ ?$$

11. $ABCD$ – ромб, в котором $\cos\angle BAD=0,2$, а радиус вписанной окружности равен 96. Найдите радиус окружности, которая проходит через вершину D и касается стороны AB в ее середине.

12. В конус вписан шар. Плоскость, проходящая через вершину конуса и составляющая с плоскостью его основания угол φ, $\cos\varphi=0,54$, пересекает шар. Отношение площади сечения к площади поверхности шара равно 0,16. Найдите косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения g (кроме оговоренных случаев) считайте равным 10 м/с^2.

Вариант 1

1. Из окна, расположенного на высоте 20 м от земли, горизонтально брошен камень, упавший на расстоянии 8 м от дома. С какой скоростью был брошен камень?

2. Груз массой 7,5 кг поднимают на веревке с поверхности земли вертикально на высоту 1 м: один раз с постоянной скоростью, второй раз с ускорением 2 м/с^2. На какую величину работа, совершаемая во втором случае, будет больше, чем в первом?

3. Однородное тело объемом 0,0003 м^3 плавает в жидкости, плотность которой в 5 раз больше плотности материала тела. Какой объем тела (в см^3) будет выступать над поверхностью жидкости?

4. На какой глубине объем пузырька воздуха, поднимающегося со дна водоема, в 6 раз меньше, чем на поверхности? Атмосферное давление 100 кПа, плотность воды 1000 кг/м^3. Температура воды в толще и на поверхности одна и та же.

5. Два конденсатора, емкости которых 1 мкФ и 4мкФ, соединены последовательно и подключены к источнику тока с ЭДС 120 В. Найдите разность потенциалов на конденсаторе с большей емкостью.

6. Две одинаковые лампы и добавочное сопротивление 10 Ом соединены последовательно и включены в сеть с постоянным напряжением 220 В. Найдите силу тока в цепи, если напряжение на каждой лампе равно 50 В.

7. Длина одного математического маятника в 16 раз больше длины второго математического маятника. Найдите отношение частоты колебаний второго маятника к частоте колебаний первого.

8. Фокусное расстояние объектива проекционного фонаря 20 см. Какое увеличение диапозитива дает фонарь, если экран удален от объектива на расстояние 200 см?

9. Замкнутая цепочка массой 157 г надета «с натягом» на жесткий вертикальный цилиндр радиусом 5 см. Когда цилиндр раскрутили до угловой скорости $20\ c^{-1}$, цепочка с него соскользнула вниз. Чему равно натяжение цепочки? Коэффициент трения цепочки о цилиндр 0,1. Принять $\pi = 3{,}14$.

10. Небольшое тело соскальзывает по наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю», с высоты 1,5 м. Радиус петли 75 см. На какой высоте (в см) тело оторвется от поверхности петли? Высота отсчитывается от нижней точки петли. Трением пренебречь.

11. С какой высоты (в км) должен падать оловянный шарик, чтобы при ударе о поверхность он полностью расплавился? Считать, что 50% энергии шарика идет на его нагревание и плавление. Начальная температура шарика 32 °С. Температура плавления олова 232 °С, его удельная теплоемкость 200 Дж/(кг · К), удельная теплота плавления 58 кДж/кг, ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ м/c^2$.

12. Длинную проволоку согнули под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = 3/4$) и поместили в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно линиям поля. Вдоль сторон угла равномерно перемещают перемычку из такой же проволоки так, что она все время образует прямой угол с одной из его сторон. В начальный момент перемычка находится на расстоянии 0,2 м, а через время 1 с – на расстоянии 0,6 м от вершины угла. Какое количество теплоты (в мДж) выделилось в системе за это время? Сопротивление единицы длины проволоки 0,01 Ом/м.

Вариант 2

1. На наклонной плоскости длиной 20 м и высотой 12 м находится груз массой 5 кг. Какую силу, направленную вдоль плоскости, надо приложить к грузу, чтобы втаскивать его с ускорением $2\ м/c^2$? Коэффициент трения равен 0,3.

2. Шар массой 100 г, двигавшийся со скоростью 5 м/с, сталкивается абсолютно неупруго с шаром массой 150 г, двигавшимся в том же направлении со скоростью 4 м/с. Найдите скорость шаров после удара. Ответ дайте в см/с.

3. Под каким углом (в градусах) к горизонту брошено тело с поверхности земли, если в наивысшей точке траектории его кинетическая энергия в три раза больше потенциальной? Потенциальную энергию на поверхности земли принять равной нулю.

4. На сколько грамм уменьшилась масса воздуха в открытом сосуде, если его нагрели от 50 °С до 100 °С? После нагревания в сосуде оказалось 646 г воздуха.

5. При трении двух одинаковых тел температура их через одну минуту повысилась на 10 °С. Какова средняя мощность, развиваемая в обоих телах при их трении? Теплоемкость каждого тела 240 Дж/К. Теплопотери не учитывать.

6. Какое количество энергии (в кДж) расходуется на нагревание электроутюга в течение 50 с, если напряжение сети 220 В, а сила тока 3 А?

7. Квадратная рамка со стороной 20 см расположена в однородном магнитном поле с индукцией 0,3 Тл так, что нормаль к ее поверхности образует угол 60° с вектором индукции. Определите магнитный поток (в мВб) через плоскость рамки.

8. Расстояние между предметом и его уменьшенным в 6 раз мнимым изображением равно 25 см. Найдите расстояние от предмета до линзы (в см).

9. За четвертую секунду равноускоренного движения тело проходит путь 4 м и останавливается. Какой путь оно прошло за вторую секунду?

10. В цилиндрическом сосуде с водой площадью 200 $см^2$ плавает в вертикальном положении цилиндр высотой 30 см и площадью основания 100 $см^2$. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы полностью извлечь цилиндр из воды, если он сделан из материала плотностью 400 $кг/м^3$? Плотность воды 1000 $кг/м^3$.

11. Две частицы, имеющие массы 2 г и 3 г и одинаковые заряды 6 мкКл, приближаются друг к другу. В некоторый момент они находятся на расстоянии 30 м и имеют одинаковые скорости 3 м/с. Найдите наименьшее расстояние между частицами в процессе движения. Коэффициент в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

12. Шарик массой 0,1 кг, подвешенный на нити, совершает гармонические колебания. Во сколько раз увеличится частота колебаний, если шарику сообщить заряд 100 мкКл и поместить в однородное электрическое поле напряженностью 30 кВ/м, направленное вертикально вниз?

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{a + 3\sqrt{a} - 2 - 6a^{-1/2}}{\sqrt{a} - 2a^{-1/2}}.$$

2. Какое число больше: $a = \log_2 3$ или $b = \log_3 5$?

3. Решите уравнение

$$\frac{x - 7\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 6} = 5.$$

4. Решите уравнение

$$|x + 1|(x - 1) = 1.$$

5. Решите уравнение

$$2\sin x \cos 3x = \sin 8x.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy = -2, \\ 3y^2 + xy = 5. \end{cases}$$

7. Решите уравнение

$$2^x = 3^{x(x+2)}.$$

8. На графике функции $y = \sqrt{x+1}$ найдите точку, ближайшую к точке $A(3{,}5; 0)$.

9. Решите неравенство

$$x^2-1\ge(x-1)\sqrt{x^2-9}.$$

10. Решите уравнение

$$\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-8\right)\sin 2x=-3.$$

11. Решите уравнение

$$9\left(\log_4 3\right)\log_{9x}^2 x=\left(\log_x 4\right)^{-1}.$$

12. Найдите рациональное число – наименьший положительный корень уравнения

$$4\sin\pi x\cos 2\pi x=\operatorname{tg}\pi x.$$

13. Вычислите $2\left(\operatorname{ctg}^2 18^\circ+1\right)/\cos^2 36^\circ$. Убедитесь, что это число целое.

14. Найдите

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\alpha\right)^{-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\alpha\right)^{-1},$$

если $\sin\alpha+\cos\alpha=1/3$.

15. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма величин, обратных к ним, равна 2. Найдите произведение первого и восьмого членов прогрессии.

16. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{8(2-x)^{-1}-|x+2|}.$$

17. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Пусть K – точка пересечения отрезков BM и AN. Найдите $AM : MC$, если $AK : KN = 5 : 1$, $BK : KM = 3 : 1$.

18. Найдите объем шара, описанного около конуса объема $\left(\frac{4}{5}\right)^4\pi$, если косинус угла между образующей конуса и его высотой равен $4/5$.

19. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2-4}+x\sqrt{x-1}\ge x^2.$$

20. При каких действительных значениях a промежуток $[1; 2]$ принадлежит множеству решений неравенства

$$2|x+a|>3a+|x-2a|?$$

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{ab^{-1}-4}{b^{-1}\sqrt{a}+2b^{-1/2}}+2\sqrt{b}.$$

2. Решите уравнение

$$x^{x-2}=\sqrt[3]{x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{5-x}+x=-1.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{8}{1-x}+\frac{2}{5+x}<3.$$

5. Найдите наибольшее двузначное натуральное число, которое является общим членом двух арифметических прогрессий $a_n=7n+1$, $b_k=3k-2$, где $k,n\in\mathbf{N}$.

6. В геометрической прогрессии сумма первых четырех членов равна 45, а сумма первого и третьего членов равна 15. Найдите седьмой член прогрессии.

7. Найдите $\sin 3\alpha\sin\alpha$, если $2(\cos 2\alpha)^{-1}=6\cos 2\alpha-3$.

8. Решите неравенство

$$|x-3|<18(3+x)^{-1}.$$

9. Решите уравнение

$$(2+x)^{-1}\log_5\left(26-5^{-x}\right)=1.$$

10. Найдите уравнения касательных к графику функции $y=-\sqrt{3+x}$, проходящих через точку $M(0;-2)$.

11. Решите неравенство

$$\log_{(16-8x)/(4-x)}2\le\log_{4-x}2.$$

12. Решите уравнение

$$\cos 2x\cdot\left(4\sin^2 x+3\right)=-3.$$

13. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\pi x^{-1}\right)}\sqrt{x^2-1}.$$

14. Пусть $f(x)=-x+5x^{-1}$ при $x<0$. Решите уравнение

$$f^{-1}\left(y+\frac{10}{3}\right)=y-1,$$

где $y=f^{-1}(x)$ – функция, обратная к исходной функции.

15. Решите неравенство

$$\sqrt{x+13}-\sqrt{x-2}>\sqrt{2x+3}.$$

16. Найдите значения a, при которых имеет решение уравнение

$$\left|2x^2+1-2a^2\right|=|a|\sqrt{1-4x^2}.$$

17. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AB = 12$, $AC = 5$. Пусть точка O – середина отрезка, соединяющего точку пересечения биссектрис треугольника и точку пересечения его медиан. Найдите длину OB.

18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{y^2+x^2}+|y|=5-|x-5|,\\ x^3+(y+2)x^2-3x-6=0.\end{cases}$$

19. В пирамиде $ABCD$ даны стороны основания $AB = 8$, $BC = 5$, $CA = 4$, а длина каждого бокового ребра равна 10. Найдите косинус острого угла между прямыми AD и BC.

20. На окружности $x^2+y^2=9$ найдите точку, в которой выражение $12y^2-5xy$ принимает наименьшее значение.

Публикацию подготовили И.Ильин, И.Комарчев, С.Преображенский

Единый государственный экзамен по математике

Б.ПИСАРЕВСКИЙ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ проводится с 2001 года, масштабы его проведения растут с каждым годом. В 2003 году его сдавали более 620000 выпускников из 47 регионов России, в этом году будут сдавать еще больше. Все большее число высших учебных заведений засчитывают результаты ЕГЭ за вступительные экзамены. У этой новинки существуют как сторонники, а среди них Министерство образования РФ, так и противники, утверждающие, что она представляет собой угрозу всей системе образования в стране. Сразу оговоримся, что вопроса о целесообразности проведения ЕГЭ мы не касаемся вовсе, речь далее идет только о том, каково содержание ЕГЭ по математике.

На экзамене каждому выпускнику предлагается за 4 часа решить 30 задач, так было в прошлом году и будет в нынешнем. Все задачи разделены на 3 категории. В 16 задачах категории А, самых простых из всего задания, необходимо указать номер единственного правильного ответа из 4 предлагаемых. Тестовый вид этого раздела не должен создавать иллюзий о возможности угадать ответ. Во-первых, это сделать невозможно – так поставлены вопросы и сформулированы ответы (кстати, с учетом типичных ошибок при решении). Во-вторых, важно затратить на эту часть работы как можно меньше времени – организаторы ЕГЭ считают, что не более 45 минут. В итоге оптимальный способ – это решить задачу и сравнить свой собственный ответ с предлагаемыми. Номер правильного ответа заносится в специальный бланк, и никакие пояснения и обоснования выполняемых действий не требуются.

Категорию В составляют 10 задач повышенной по сравнению с категорией А трудности. В каждой из этих задач ответом является целое число, заносимое в тот же бланк. Обоснований здесь также не требуется; организаторы считают, что на эту часть работы можно затратить не более 90 минут.

Индивидуальный результат каждого участника ЕГЭ выражается сначала в баллах, потом баллы переводятся в проценты. Каждый верный ответ в задачах категорий А и В дает участнику 1 балл, так что максимально возможный результат по этим двум категориям – 26 баллов.

Категорию С составляют 4 задачи наиболее высокой сложности. Их ответы могут иметь любую структуру, решения записываются полностью на другой бланк, при этом требуется привести все обоснования. Этот раздел проверяет специальная комиссия в соответствии с имеющейся у нее инструкцией. Безупречное решение каждой из задач категории С оценивается в 4 балла, в инструкции указано, сколько баллов снимается за какие недостатки, так что в итоге балл за задачу может быть от 0 до 4. Максимально возможный результат всего экзамена составляет 42 балла. В 2003 году по всей стране такой результат показали всего 44 участника.

Советуем читателям самостоятельно решить (на время!) представленный вариант ЕГЭ и лишь потом сопоставить ваши решения и ответы с приводимыми ниже.

Вариант единого государственного экзамена по математике 2003 года

Часть 1

А1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ и угол α принадлежит II четверти.

1) $-\frac{3}{4}$; 2) $-\sqrt{15}$; 3) $\sqrt{7}$; 4) $-\sqrt{5}$.

А2. Упростите выражение $0,9b^{\frac{1}{5}} : 9b^{\frac{2}{5}}$.

1) $0,1b^{\frac{1}{5}}$; 2) $0,1b^{\frac{3}{5}}$; 3) $0,1b^{-\frac{1}{5}}$; 4) $0,1b^{\frac{1}{2}}$.

А3. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a}}$.

1) a^3; 2) $a^{\frac{7}{3}}$; 3) $a^{\frac{8}{3}}$; 4) a^2.

А4. Вычислите $\log_6 \frac{36}{k}$, если $\log_6 k = -6$.

1) –8; 2) 8; 3) 6; 4) –4.

А5. Решите уравнение

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\sin\frac{5x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

1) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$;

2) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$;

3) $\pm\frac{\pi}{8} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$;

4) $(-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

А6. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $4\log_3(x-5) = \log_3 16$.

1) $[-3;3)$; 2) $[3;6)$; 3) $[6;8)$; 4) $[8;12)$.

А7. Решите неравенство $0,7^{5x+1} \geq 0,7^{2x-3}$.

1) $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]$; 2) $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$; 3) $\left(-\infty;-\frac{2}{7}\right]$; 4) $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right)$.

А8. Решите неравенство $\frac{x+7}{(2x-1)(8-x)} \geq 0$.

1) $(-\infty;0,5)\cup(8;+\infty)$; 2) $(-\infty;-7]\cup(0,5;8)$;

3) $[-7;1)\cup[8;+\infty)$; 4) $[-7;0,5]\cup(8;+\infty)$.

А9. Какому промежутку принадлежат корни уравнения $\sqrt{3x+1} = x-1$?

1) $[0;3)$; 2) $[3;5)$; 3) $[-1;2]$; 4) $[5;6]$.

А10. Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке 1.

1) $[0;2]$; 2) $[-7;-1]$; 3) $[-7;1]$; 4) $[-5;2]$.

А11. Найдите область определения функции $y = \log_{0,5}\left(25-x^2\right)$.

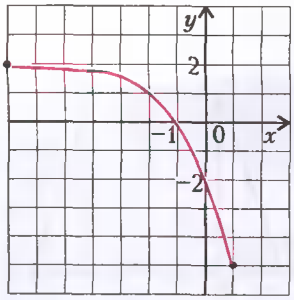


Рис. 1

1) $[0;5)$; 2) $[-5;5]$;

3) $(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$;

4) $(-5;5)$.

А12. Найдите множество значений функции $y=\sin x-1{,}5$.

1) $[-1{,}5;1{,}5]$;

2) $[-1{,}5;0]$;

3) $[-2{,}5;-0{,}5]$;

4) $[-2{,}5;-1{,}5]$.

А13. На одном из рисунков 2,1) – 2,4) изображен график функции $y=\log_2 x$. Укажите этот рисунок.

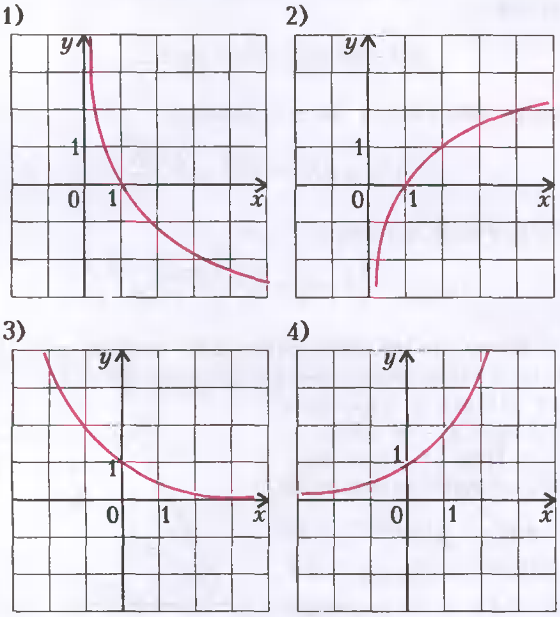


Рис. 2

А14. Найдите производную функции $y=x\sin x$.

1) $y'=\cos x+1$; 2) $y'=x\cos x$;

3) $y'=\cos x$; 4) $y'=\sin x+x\cos x$.

А15. Для функции $f(x)=12x^5-\sin x$ укажите первообразную F, график которой проходит через точку $K(0;-9)$.

1) $F(x)=2x^6-\cos x-9$;

2) $F(x)=2x^6+\cos x+9$;

3) $F(x)=2x^6-\cos x-8$;

4) $F(x)=2x^6+\cos x-10$.

А16. К графику функции $f(x)=-2x^2+5x-17$ в точке с абсциссой $x_0=\dfrac{3}{4}$ проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона касательной к оси Ox.

1) 8; 2) 2; 3) −15; 4) −1.

Часть 2

В1. Пусть $(x_0;y_0)$ – решение системы

$$\begin{cases}\sqrt{9-6x+x^2}-y=3,\\ 2x-y-3=0.\end{cases}$$

Найдите сумму x_0+y_0.

В2. На рисунке 3 изображен график производной функции $y=f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$. Исследуйте функцию $y=f(x)$ на монотонность. Укажите в ответе число промежутков возрастания.

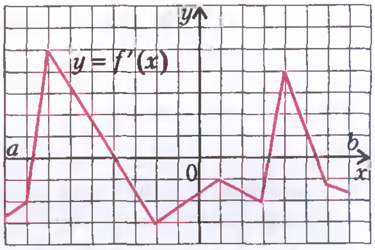


Рис. 3

В3. Найдите значение выражения

$$\left(\left(25-\log_2^2 5\right)\log_{160} 2+\log_2 5\right)\cdot 7^{\log_7 6}.$$

В4. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y=7\cdot 2^{3\sin^2 x+4\cos^2 x-5}.$$

В5. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin^2(\pi-6\pi x)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+6\pi x\right)=$$
$$=\frac{\sin(\pi-2\pi x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\pi x\right)}+\sin\frac{3\pi x}{2}\cos\pi x$$

на промежутке $[1;3]$.

В6. При каком наибольшем отрицательном значении a функция $y=\sin\left(24x+\dfrac{a\pi}{100}\right)$ имеет максимум в точке $x_0=\pi$?

В7. Катер прошел 45 км по течению реки и 35 км против течения реки за то же время, что он проходит 80 км в стоячей воде. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

В8. В арифметической прогрессии сумма первых семи членов равна 21, разность пятого и третьего членов равна −6. На каком месте в этой прогрессии стоит число −21?

В9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точки B, D и середину ребра D_1C_1 проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 144.

В10. Диагонали трапеции $KMPT$ с основаниями MP и KT пересекаются в точке C. Площадь треугольника MCP равна 4, $KT=2MP$. Найдите площадь трапеции.

Часть 3

С1. Решите уравнение

$$\log_9(37-2x)\log_{7-2x}3=1.$$

С2. При каких значениях p уравнение

$$5\cos 2x+\frac{2p}{\sin x}=-29$$

имеет решения?

С3. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Площадь боковой поверхности конуса равна $9\pi\sqrt{3}$. Найдите длину ребра тетраэдра.

С4. Из области определения функции $y=\log_{0,8}\left(a^a-a^{\frac{8x+5}{x+5}}\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 8, но меньше 15.

Ответы к задачам частей 1 и 2

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13
2	3	4	2	1	3	1	2	4	4	4	3	2
A14	A15	A16	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
4	4	2	0	2	30	3	4	–150	24	12	768	36

Решения избранных задач

Разберем решения задач, вызвавших наибольшие затруднения у выпускников 2003 года. Из категории B это задача B4 (ее правильно решили 11% участников), задачи B5 (6%), B6 (3%), B9 (5%) и B10 (9%). Около 80% всех участников ЕГЭ не получили ни одного балла за задачи категории C.

B4. Поскольку

$$y = 7\cdot 2^{3\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\cos^2 x-5} = 7\cdot 2^{\cos^2 x-2} = \frac{7}{4}\cdot 2^{\cos^2 x},$$

а функция $y = 2^x$ монотонно возрастает, то нас интересует область значений показателя степени $\cos^2 x$. Это промежуток $[0;1]$, так что область значений данной функции – промежуток $\left[\frac{7}{4};\frac{7}{2}\right]$ и наибольшее целое число из этого промежутка есть 3.

B5. ОДЗ для данного уравнения задается условием $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\pi x\right)\neq 0$, или $\sin 2\pi x\neq 0$, откуда $x\neq\frac{k}{2}$, где $k\in\mathbf{Z}$. Пользуясь формулами приведения, переписываем исходное уравнение в виде

$$\sin^2 6\pi x+\cos^2 6\pi x = \frac{\sin 2\pi x}{\sin 2\pi x}+\sin\frac{3\pi x}{2}\cos\pi x,$$

или $\sin\frac{3\pi x}{2}\cos\pi x = 0$. Если $\cos\pi x = 0$, то $\sin 2\pi x = 0$, так что корни этого сомножителя заведомо не входят в ОДЗ. Корни первого сомножителя: $x = \frac{2n}{3}, n\in\mathbf{Z}$. Они будут лежать в промежутке $[1;3]$, если $1{,}5\le n\le 4{,}5$; целые значения из этого промежутка суть n = 2, 3, 4. Этим значениям n соответствуют корни $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 2, x_3 = \frac{8}{3}$. При этом в ОДЗ входят только x_1 и x_3, и их сумма равна 4.

B6. Функция $f(\alpha) = \sin\alpha$ достигает максимального значения при $\alpha = \pi/2+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Из условия $24\pi+\frac{a\pi}{100} = \frac{\pi}{2}+2\pi n$ получаем, что $a = 200n-2350$, и так как должно быть $a<0$, то $n<11{,}75$. Наибольшее значение a получится при наибольшем целом n, удовлетворяющем этому условию, т. е. при $n = 11$. Поэтому $a = -150$.

B9. На рисунке 4 через M обозначена середина ребра D_1C_1. Плоскость сечения, проходящая через B, D и M, пересекает параллельные грани куба по параллельным прямым, поэтому $MN\parallel BD$, значит, $MN\parallel B_1D_1$, и так как M – середина ребра D_1C_1, то $MN = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{1}{2}BD$. Пусть ребро куба равно a. Тогда в равнобедренной трапеции $BNMD$ с высотой NP (рис.5) $BD = a\sqrt{2}$, $NM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а боковые стороны трапеции легко находятся из треугольника

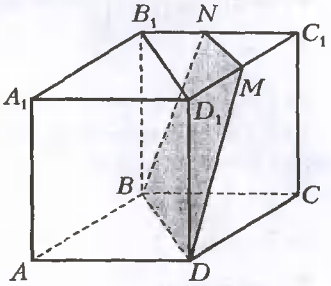


Рис. 4

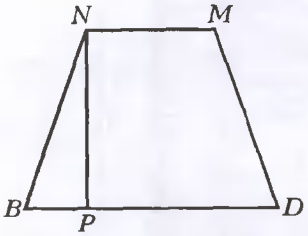


Рис. 5

DMD_1:

$$NB = MD = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку

$$BP = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

то теперь легко найти высоту трапеции:

$$NP = \sqrt{BN^2-BP^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Поэтому площадь трапеции есть

$$S_{BNMD} = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}+\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{9a^2}{8}.$$

По условию эта площадь равна 144, поэтому $a^2 = 128$, и площадь полной поверхности куба равна $6a^2 = 768$.

B10. Пусть в трапеции $KMPT$ $\angle MCP = \alpha$, $MC = a$, $PC = b$ (рис.6). Поскольку площадь треугольника MCP есть $S_{MCP} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ и по условию эта площадь равна 4, то $ab\sin\alpha = 8$. В подобных треугольниках KCT и MCP запишем отношение сторон:

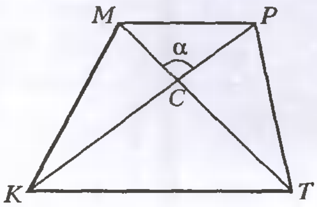


Рис. 6

$$\frac{KC}{PC} = \frac{TC}{MC} = \frac{KT}{MP} = 2.$$

Отсюда $KC = 2b$, $TC = 2a$, и

$$S_{KMPT} = \frac{1}{2}\left(ab\sin\alpha+2ab\sin(180^\circ-\alpha)+\right.$$

$$\left.+4ab\sin\alpha+2ab\sin(180^\circ-\alpha)\right) = \frac{9}{2}ab\sin\alpha = \frac{9}{2}\cdot 8 = 36.$$

C1. Область допустимых значений задается системой

$$\begin{cases}37-2x>0,\\ 7-2x>0,\\ 7-2x\neq 1,\end{cases}$$

откуда $x\in(-\infty;3)\cup\left(3;\frac{37}{12}\right)$. Преобразовав исходное уравнение к виду $\log_9(37-2x) = \log_3(7-2x)$, переходим в логарифме слева к основанию 3 и получаем квадратное уравнение $x^2-4x+3 = 0$. Из двух его корней $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ в ОДЗ входит только первый. Окончательно, $x = 1$.

C2. Используя формулу $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$, приведем уравнение к виду $5\sin^3 x-17\sin x = p$. Положим $t = \sin x$ и при $t\in[-1;1]$, $t\neq 0$ рассмотрим функцию $f(t) = 5t^3-17t$. Не будем пока обращать внимания на условие $t\neq 0$, тогда эта нечетная функция рассматривается на $[-1;1]$. При этом $f'(t)=15t^2-17$, на всем промежутке $f'(t)<0$ и функция убывает. Ее наибольшее значение, достигаемое на левом конце промежутка, есть $f_{\max}=f(-1)=12$, а наименьшее, соответственно, $f_{\min}=f(1)=-12$. Будучи непрерывной на $[-1;1]$, функция принимает все промежуточные значения между $f_{\min}$ и $f_{\max}$. Поэтому на $[-1;1]$ ее область значений представляет собой промежуток $[-12;12]$. Из этого промежутка придется исключить значение $f(0)=0$. В итоге искомые значения p, совпадающие с исправленной областью значений функции, задаются условием $p\in[-12;0)\cup(0;12]$.

С3. Пусть $ABCD$ – данный правильный тетраэдр (рис.7), K – середина ребра CD, M – середина ребра BC. Проведем MN параллельно AB и MQ параллельно CD. Через MN и MQ проведем плоскость, пусть P – точка пересечения этой плоскости с ребром AD. Сечение тетраэдра $MNPQ$ параллельно прямым CD и AB по построению. При этом MN и MQ будут средними линиями в треугольниках ABC и BCD соответственно. Поэтому N и Q – середины ребер AC и BD соответственно. Так как ребро AB параллельно плоскости сечения $MNPQ$, то прямая QP пересечения плоскости сечения с плоскостью BDA также параллельна AB. В итоге P – середина ребра AD, QP и NP – средние линии в треугольниках BDA и CDA соответственно.

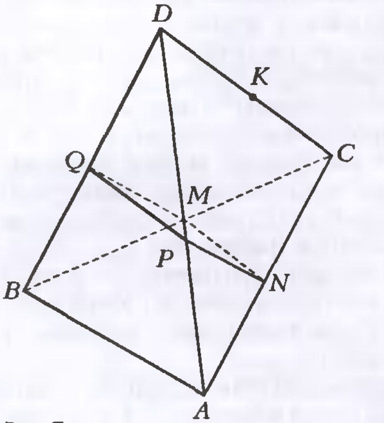


Рис. 7

Так как все ребра тетраэдра равны, четырехугольник $MNPQ$ – ромб; если x – длина ребра тетраэдра, то сторона ромба равна $0{,}5x$. Рассмотрим теперь четырехугольную пирамиду $KMNPQ$ (рис.8), где L – середина MN. Боковые ребра пирамиды – средние линии равносторонних треугольников CDA и CDB, все они равны $0{,}5x$. Поскольку боковые ребра пирамиды равны между собой, то равны и их проекции на плоскость основания пирамиды. Поэтому около основания пирамиды можно описать окружность, и $MNPQ$ – квадрат со стороной $0{,}5x$. Основание конуса вписано в этот квадрат; ясно, что радиус основания конуса есть $R=0{,}25x$, а образующая конуса

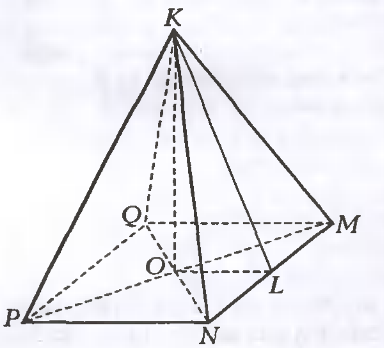


Рис. 8

$$l=KL=\sqrt{KN^2-NL^2}=0{,}25x\sqrt{3}.$$

Площадь боковой поверхности конуса есть $\pi Rl=\dfrac{\pi x^2\sqrt{3}}{16}$. По условию эта площадь равна $9\pi\sqrt{3}$, поэтому $x^2=144$, и $x=12$.

С4. Отметим, прежде всего, что $a>0$, $a\neq1$ и что область определения при выполнении условия $x\neq-5$ задается неравенством $a^a-a^{\frac{8x+5}{x+5}}>0$. Так как при $a>1$ показательная функция $y=a^x$ возрастает, а при $a<1$ убывает, то это неравенство можно переписать в равносильном виде $(a-1)\left(a-\dfrac{8x+5}{x+5}\right)>0$. Последнее неравенство можно преобразовать так: $(a-1)\dfrac{(a-8)x+(5a-5)}{x+5}>0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a=8$. Неравенство принимает вид $\dfrac{245}{x+5}>0$ и множество решений содержит бесконечное число целых положительных чисел, так что условие задачи не выполнено. При $a\neq8$ можно переписать рассматриваемое неравенство так: $(a-1)(a-8)\dfrac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5}>$ >0. Теперь придется рассмотреть три случая.

1) $0<a<1$. Произведение первых двух сомножителей положительно, поэтому $\dfrac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5}>0$. Если $a\in(0;1)$, то $\dfrac{5a-5}{a-8}=5+\dfrac{35}{a-8}\in(0;0{,}625)$. Корень числителя $x=-\dfrac{5a-5}{a-8}\in(-0{,}625;0)$, т.е. лежит правее корня знаменателя $x=-5$. Поэтому решение неравенства есть $x\in(-\infty;-5)\cup\left(-\dfrac{5a-5}{a-8};+\infty\right)$. В этом множестве целых положительных чисел бесконечно много, и условие задачи не выполняется.

2) $1<a<8$. Произведение первых двух сомножителей отрицательно, поэтому $\dfrac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5}<0$. Если $a\in(1;8)$, то $\dfrac{5a-5}{a-8}=5-\dfrac{35}{8-a}\in(-\infty;0)$. Корень числителя $x=-\dfrac{5a-5}{a-8}=$ $=-5+\dfrac{35}{8-a}\in(0;+\infty)$, т.е. лежит правее корня знаменателя $x=-5$. Поэтому решение неравенства есть $x\in I=$ $=\left(-5;-5+\dfrac{35}{8-a}\right)$. Про правую границу промежутка I мы наверняка знаем, что она лежит правее точки $x=0$. Осталось выяснить, где она должна лежать, чтобы сумма всех целых положительных чисел из промежутка I была больше 8, но меньше 15. Поскольку $1+2+3=6<8$, $1+2+3+4=10>8$ и $1+2+3+4+5=15$, правая граница I должна принадлежать промежутку $(4;5]$. Из двойного неравенства $4<-5+\dfrac{35}{8-a}\le5$ получаем, что $a\in\left(\dfrac{37}{9};\dfrac{9}{2}\right]$. За границы рассматриваемого промежутка $a\in(1;8)$ мы при этом не вышли.

3) $a>8$. Произведение первых двух сомножителей положительно, поэтому $\dfrac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5}>0$. Если $a\in(8;+\infty)$, то $\dfrac{5a-5}{a-8}=5+\dfrac{35}{a-8}\in(5;+\infty)$. Корень числителя $x=-\dfrac{5a-5}{a-8}\in$ $\in(-\infty;-5)$, т.е. лежит левее корня знаменателя $x=-5$. Поэтому решение неравенства есть $x\in\left(-\infty;-\dfrac{5a-5}{a-8}\right)\cup(-5;+\infty)$. В этом множестве целых положительных чисел бесконечно много, и условие задачи не выполняется.

Итак, $a\in\left(\dfrac{37}{9};\dfrac{9}{2}\right]$.

Единый государственный экзамен по физике

В.ОРЛОВ, А.ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ХОТИМ ПОЗНАКОМИТЬ ЧИТАТЕЛЕЙ С особенностями единого государственного экзамена (ЕГЭ) по физике на примере экзамена прошлого, 2003 года.

Экзамен по физике состоит из трех частей. Часть 1 содержит 30 задач (А1–А30) с выбором ответа из четырех вариантов, из которых правильный только один (надо указать номер правильного ответа). Часть 2 состоит из 5 задач (В1–В5), на которые следует дать краткий ответ (надо привести числовой ответ, точный или округленный по определенным правилам). В части 3 содержится 5 задач (С1–С5), на которые требуется дать развернутый ответ (надо привести полное решение с чертежом, обоснованиями, буквенным и числовым ответами). Из задач части 1 первые 25 считаются задачами базового уровня, последние 5 – повышенного уровня сложности (в 2004 году первые 20 будут считаться задачами базового уровня, последние 10 – повышенного уровня), часть 2 содержит задачи повышенного уровня, часть 3 – задачи высокого уровня сложности. Продолжительность экзамена 3,5 часа.

Такую же структуру экзамена предполагается сохранить в 2004 году.

Задачи частей 1 и 2 проверяются автоматически, методом сканирования бланков ответов, и каждая задача оценивается предварительно в один балл. Задачи группы 3 проверяются экспертом, который оценивает представленное решение в соответствии с подробными инструкциями. В прошлом году одна из задач этой группы оценивалась максимум в два балла, две – максимум в три балла и еще две – максимум в четыре балла (в этом году все задачи группы 3 будут оцениваться максимум в три балла). Однако набранные при проверке баллы являются предварительными, а в окончательный результат каждая задача входит с поправочным коэффициентом, учитывающим, какой процент экзаменуемых успешно с ней справился. В сертификат экзамена выставляется полное число баллов от 0 до 100, соответствующее тому, сколько процентов от максимально возможного составляет результат участника.

Для итоговой школьной аттестации выпускнику выставляется оценка по пятибалльной шкале. Например, для получения пятерки в 2003 году достаточно было набрать более 70 баллов (по стобальной шкале), что удалось лишь 7,4% экзаменуемых. Неудовлетворительной отметкой оценивались работы, набравшие менее 33 баллов (11,7% экзаменуемых).

Набранные в ЕГЭ баллы можно заявить для поступления в любой вуз страны, принимающий участие в эксперименте. В 2004 году список таких вузов существенно расширится по сравнению с предыдущим годом и будет включать большинство ведущих вузов. Естественно, что для поступления в престижный вуз баллы по предметам, определенным как конкурсные для данного вуза, должны быть достаточно высокими. Однако это не значит, что надо решить все задачи. В прошлом году более 90 баллов по физике набрали только 0,3% участников (139 человек), а безупречно решил все задачи и набрал 100 баллов только один человек.

Ознакомившись с предложенным вариантом ЕГЭ (другие варианты и подробный анализ результатов проведения ЕГЭ в 2003 году имеются в книгах, список которых приведен в конце статьи), можно прийти к выводу, что подготовка к такому экзамену должна состоять из двух основных этапов. Первый этап принципиально не отличается от той подготовки в вуз, которая отрабатывалась многие годы и ставила целью достаточно глубокое усвоение физики как предмета и обучение решению задач различного уровня. Здесь следует использовать классические задачники и пособия. Второй этап можно назвать тренировочным, он состоит в решении типовых вариантов ЕГЭ и выработке умения правильно распределить время и силы между задачами разных групп. Особое внимание надо уделить качественным задачам, задачам, где условия представлены в графическом виде, вопросам по истории науки, вопросам на проявление физических законов в окружающей действительности и практической деятельности человека. Такие задачи часто вызывают у школьников большие трудности.

Однако было бы неправильно думать, что можно обойти первый этап подготовки и быстро натренироваться на решение вариантов. В отличие от многих известных тестов, состоящих из большого числа простых вопросов, для ответа на большинство из которых достаточно применить некоторые простые рецепты и избежать прямого решения задач, многие вопросы группы 1 построены таким образом, что надежнее всего решить задачу самому и сравнить свой ответ с предложенными вариантами. Кроме того, без решения хотя бы нескольких задач групп 2 и 3 нельзя надеяться на получение высокого балла, обеспечивающего поступление в престижный вуз (отметим, что при проверке задач группы 3 учитывается наличие всех необходимых элементов решения). Таким образом, содержание и структура ЕГЭ поддерживает и стимулирует традиционные для нашей страны активные методы изучения физики, основанные на решении достаточно большого числа задач разного уровня.

Ниже приведен один из вариантов ЕГЭ 2003 года и краткие решения наиболее трудных и интересных задач. Каждый вариант содержит инструкцию по выполнению работы и справочные данные (десятичные приставки, физические постоянные, плотности и молярные массы вещества, массы атомов и т.д.), которые здесь мы для краткости опускаем.

Вариант единого государственного экзамена по физике 2003 года

Часть 1

А1. К.Э.Циолковский в книге «Вне Земли», описывая полет ракеты, отмечал, что через 10 с после старта ракета находилась на расстоянии 5 км от поверхности Земли. Принимая движение ракеты равноускоренным, рассчитайте ускорение ракеты.

1) 1000 м/с^2; 2) 500 м/с^2; 3) 100 м/с^2; 4) 50 м/с^2.

А2. Массивный груз подвешен на тонкой нити *1* (рис.1). Снизу к грузу прикреплена такая же нить *2*. Какая нить оборвется первой, если резко дернуть за нить *2*?

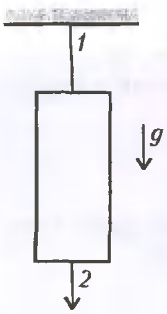


Рис. 1

1) *1*;
2) *2*;
3) *1* и *2* одновременно;
4) *1* или *2* – в зависимости от массы груза.

А3. Чтобы в самолете летчик испытывал состояние невесомости, самолет должен двигаться:
1) равномерно и прямолинейно;
2) по окружности с постоянной по модулю скоростью;
3) с ускорением $\vec{g}$;
4) с любым ускорением.

А4. На рисунке 2 изображен тонкий невесомый стержень, к которому приложены силы $F_1 = 100$ Н и $F_2 = 300$ Н. Чтобы стержень находился в равновесии, ось вращения должна проходить через точку:

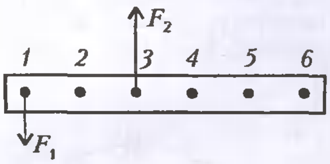


Рис. 2

1) *5*; 2) *2*; 3) *6*; 4) *4*).

А5. Автомобиль движется с постоянной скоростью 72 км/ч. Силы тяги автомобиля 1000 Н. Мощность двигателя равна:
1) $1 \cdot 10^4$ Вт; 2) $2 \cdot 10^4$ Вт; 3) $3 \cdot 10^4$ Вт; 4) $4 \cdot 10^4$ Вт.

А6. Амплитуда свободных колебаний тела равна 0,5 м. Какой путь прошло это тело за время, равное 5 периодам колебаний?
1) 10 м; 2) 2,5 м; 3) 0,5 м; 4) 2 м.

А7. Учитель продемонстрировал опыт по распространению волны по длинному шнуру. В один из моментов времени форма шнура оказалась такой, как показано на рисунке 3. Скорость распространения колебаний по шнуру равна 2 м/с. Частота колебаний равна:

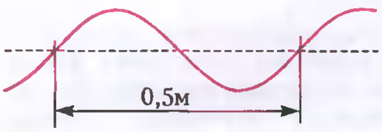


Рис. 3

1) 50 Гц; 2) 0,25 Гц; 3) 1 Гц; 4) 4 Гц.

А8. В газах при нормальных условиях среднее расстояние между молекулами:
1) примерно равно диаметру молекулы;
2) меньше диаметра молекулы;
3) примерно в 10 раз больше диаметра молекулы;
4) зависит от температуры газа.

А9. Сколько атомов содержится в 80 г неона?
1) $16 \cdot 10^{25}$; 2) $6 \cdot 10^{23}$; 3) $24 \cdot 10^{23}$; 4) $4 \cdot 10^{23}$.

А10. При постоянной температуре объем идеального газа возрос в 4 раза. Давление газа при этом:
1) увеличилось в 2 раза;
2) увеличилось в 4 раза;
3) уменьшилось в 2 раза;
4) уменьшилось в 4 раза.

А11. Температуру твердого тела понизили на 10 °С. По абсолютной шкале температур это изменение составило:
1) 283 К; 2) 263 К; 3) 10 К; 4) 0 К.

А12. В сосуде находится 1 моль гелия. Газ расширился при постоянном давлении и совершил работу A = 400 Дж. Изменение температуры ΔT газа равно:
1) ≈ 48 К; 2) ≈ 0,02 К; 3) 400 К; 4) 1 К.

А13. Вода кипит при определенной постоянной температуре. Температуру кипения воды можно понизить, если:
1) добавить в воду поваренную соль;
2) уменьшить давление воздуха и водяных паров в сосуде;
3) размешивать воду;
4) отлить часть воды из сосуда.

А14. На рисунке 4 показан график зависимости температуры кристаллического вещества от времени его нагревания. Какова температура плавления вещества?

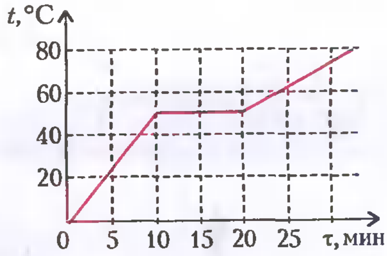


Рис. 4

1) 80 °С; 2) 60 °С; 3) 50 °С; 4) 45°С.

А15. Какой график соответствует зависимости силы взаимодействия F двух одинаковых точечных зарядов от модуля одного из зарядов q при неизменном расстоянии между ними (рис.5)?

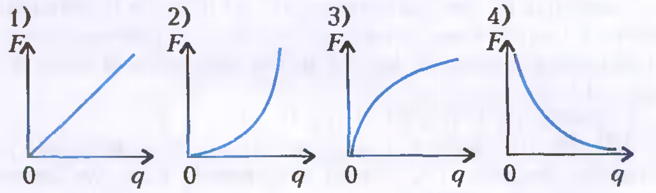


Рис. 5

А16. На рисунке 6 изображены графики зависимости силы тока от приложенного напряжения для трех проводников. Какой из проводников обладает бо́льшим сопротивлением?

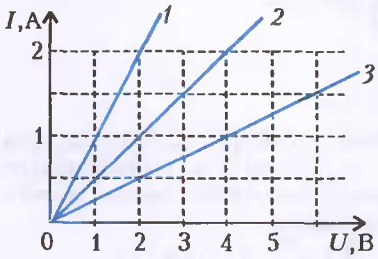


Рис. 6

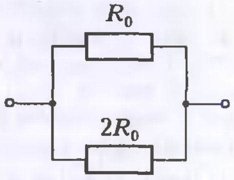


Рис. 7

1) *1*; 2) *2*; 3) *3*; 4) сопротивления проводников одинаковы.

А17. Сопротивление участка цепи, изображенного на рисунке 7, равно:
1) $\frac{2}{3}R_0$; 2) $3R_0$; 3) $1{,}5R_0$; 4) $\frac{1}{3}R_0$.

А18. С какой силой действует однородное магнитное поле с индукцией 2,5 Тл на проводник длиной 50 см, расположенный под углом 30° к вектору индукции, при силе тока в проводнике 0,5 А?
1) 31,25 Н; 2) 54,38 Н; 3) 0,55 Н; 4) 0,3125 Н.

А19. По участку цепи с некоторым сопротивлением R течет переменный ток. Как изменится мощность переменного тока на этом участке цепи, если действующее значение силы тока на нем увеличить в 2 раза, а его сопротивление в 2 раза уменьшить?
1) не изменится;
2) увеличится в 2 раза;
3) уменьшится в 2 раза;
4) увеличится в 4 раза.

А20. Какой вид электромагнитного излучения обладает наибольшей частотой?
1) видимый свет;
2) инфракрасное излучение;
3) радиоволны;
4) рентгеновское излучение.

А21. Тень на экране от предмета, освещенного точечным источником света, имеет размеры в 3 раза больше, чем сам предмет. Расстояние от источника света до предмета равно 1 м. Определите расстояние от предмета до экрана.

1) 1 м; 2) 2 м; 3) 3 м; 4) 4 м.

А22. Система отсчета $Д$, в которой находится наблюдатель, движется со скоростью $\vec{v}$ вдоль прямой, соединяющей неподвижные источники света S_1 и S_2 (рис.8). Фотоны, излучаемые неподвижными источниками S_1 и S_2, движутся в системе отсчета $Д$ со скоростью:

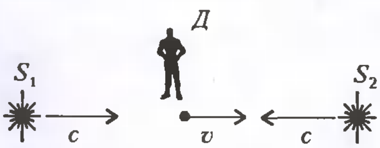


Рис. 8

1) v; 2) c; 3) $c+v$; 4) $2c$.

А23. При фотоэффекте кинетическая энергия электронов, выбиваемых из металла, зависит от: А) частоты падающего света; Б) интенсивности падающего света; В) работы выхода электронов из металла. Какое(-ие) из утверждений правильно(-ы)?

1) только Б; 2) А и Б; 3) А и В; 4) А, Б и В.

А24. Частота фотона, поглощаемого атомом при переходе атома из основного состояния с энергией E_0 в возбужденное с энергией E_1, равна:

1) $\dfrac{E_0-E_1}{h}$; 2) $\dfrac{E_1-E_0}{h}$; 3) $\dfrac{h}{E_1-E_0}$; 4) $\dfrac{ch}{E_0-E_1}$.

А25. Полоний $^{214}_{84}Po$ превращается в висмут $^{210}_{83}Bi$ в результате радиоактивных распадов:

1) одного α и одного β;
2) одного α и двух β;
3) двух α и одного β;
4) двух α и двух β.

А26. С неподвижной лодки массой 50 кг на берег прыгнул мальчик массой 40 кг со скоростью 1 м/с относительно берега, направленной горизонтально. Какую скорость относительно берега приобрела лодка?

1) 0,2 м/с; 2) 0,8 м/с; 3) 1 м/с; 4) 1,8 м/с.

А27. Максимальное значение КПД тепловой машины с температурой нагревателя 227 °С и температурой холодильника 27 °С равно:

1) 100%; 2) 88%; 3) 60%; 4) 40%.

А28. На рисунке 9 приведен график изменения силы тока в катушке индуктивности от времени. Модуль ЭДС самоиндукции принимает наибольшее значение в промежутке времени:

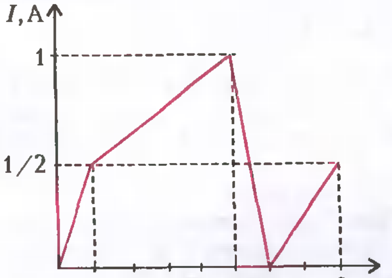


Рис. 9

1) 0 – 1 с;
2) 1 – 5 с;
3) 5 – 6 с;
4) 6 – 8 с.

А29. На рисунке 10 показан ход лучей от точечного источника света A через тонкую линзу. Какова оптическая сила линзы (ответ округлите до десятых)?

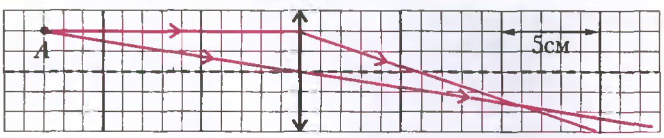


Рис. 10

1) 16,7 дптр; 2) 10,0 дптр; 3) 7,7 дптр; 4) −7,7 дптр.

А30. Как изменяется полная энергия системы из нескольких свободных покоящихся протонов и нейтронов в результате соединения их в атомное ядро?

1) увеличивается;
2) уменьшается;
3) не изменяется;
4) увеличивается, если образуется радиоактивное ядро; уменьшается, если образуется стабильное ядро.

Часть 2

В1. При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх шарик массой 10 г поднимается на высоту 2 м. Какова жесткость пружины, если до выстрела она была сжата на 5 см?

В2. Один моль инертного газа сжали, совершив работу 600 Дж. В результате сжатия температура газа повысилась на 40 °С. Какое количество теплоты отдал газ? При расчетах примите $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

В3. Плоский контур с источником постоянного тока находится во внешнем однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции которого $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости контура (рис.11). На сколько процентов изменится мощность тока в контуре после того, как поле начнет уменьшаться со скоростью 0,01 Тл/с? Площадь контура 0,1 м^2, ЭДС источника тока 10 мВ.

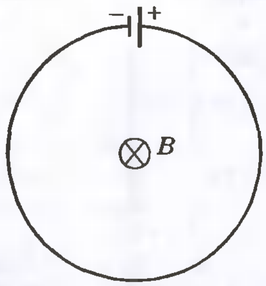


Рис. 11

В4. На поверхность стеклянной пластины нанесена тонкая пленка толщиной $d = 180$ нм с показателем преломления меньшим, чем у стекла. На пленку нормально падает свет с длиной волны $\lambda = 504$ нм. При каком значении показателя преломления пленки будет наблюдаться максимальное отражение света?

В5. Какая энергия выделяется при протекании ядерной реакции $^7_3Li + {}^1_1H \to 2\,^4_2He$? Ответ выразите в пикоджоулях (пДж) и округлите до целых.

Часть 3

С1. Брусок массой $m_1 = 600$ г, движущийся со скоростью $v = 2$ м/с, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 200$ г. Какой будет скорость первого бруска после столкновения? Удар считать центральным и абсолютно упругим.

С2. На pT-диаграмме показан цикл тепловой машины, у которой рабочим телом является идеальный газ (рис.12). На каком участке цикла работа газа наибольшая по абсолютной величине?

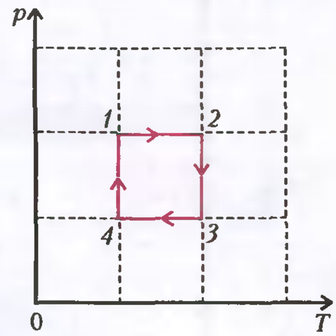


Рис. 12

С3. Два тонких медных проводника одинаковой длины l соединены последовательно. Диаметр первого d_1, второго d_2. Определите отношение напряженности электростатического поля в первом проводнике к напряженности поля во втором проводнике (E_1/E_2) при протекании по ним тока.

С4. При какой температуре газа средняя энергия теплового движения атомов одноатомного газа будет равна максимальной кинетической энергии электронов, выбиваемых из металлической пластинки с работой выхода $A_{вых} = 2$ эВ при облучении монохроматическим светом с длиной волны 300 нм?

С5. Отрицательно заряженная пластина, создающая вертикально направленное однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^4$ В/м, укреплена на горизонтальной плоскости. На нее с высоты $h = 10$ см падает шарик массой $m = 20$ г, имеющий положительный заряд $q = 10^{-5}$ Кл. Какой импульс шарик передаст пластине при абсолютно упругом ударе?

Ответы к задачам частей 1 и 2

А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10	А11	А12
3	2	3	4	2	1	4	3	3	4	3	1
А13	А14	А15	А16	А17	А18	А19	А20	А21	А22	А23	А24
2	3	1	3	1	4	2	4	2	2	3	2
А25	А26	А27	А28	А29	А30	В1	В2	В3	В4	В5	
1	2	4	3	1	1	160	102	21	1,4	3	

Краткие решения избранных задач

В2. Инертный газ – одноатомный. Из первого закона термодинамики,

$$Q = \Delta U + A' = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + (-A) =$$

$$= 1,5\cdot 1\cdot 8,3\cdot 40 \text{ Дж} + (-600 \text{ Дж}) = -102 \text{ Дж},$$

т.е. газ отдал 102 Дж тепла.

В3. По правилу Ленца определяем, что индукционный ток направлен по часовой стрелке. Следовательно, ЭДС индукции, равная $\mathcal{E}_{инд} = S\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| = 1$ мВ, создает в контуре ток того же направления, как и ЭДС источника постоянного тока. Полная ЭДС $\mathcal{E}$ стала равна 11 мВ, т.е. увеличилась в 1,1 раза. Значит, в контуре сопротивлением R сила тока $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ также возросла в 1,1 раза, а мощность тока $P = I^2R$ возросла в 1,21 раза, т.е. на 21%.

В4. При нормальном падении света на пленку оптическая разность хода между двумя интерферирующими лучами, отраженными от передней и от задней поверхностей пленки, равна $2dn$. Поскольку показатель преломления пленки n меньше, чем у стекла, изменение фазы на противоположную происходит при отражении у обоих лучей, и половину длины волны добавлять не надо. Условие максимума имеет вид $2dn = k\lambda$, где k – целое число. При $k = 1$ получаем

$$n = \frac{\lambda}{2d} = 1,4.$$

При $k > 1$ показатель преломления получается слишком большим (гораздо больше, чем у стекла).

С1. Записав законы сохранения энергии и импульса системы, найдем

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} = 1 \text{ м/с}.$$

С2. Для сравнения работ, совершенных газом на разных участках, удобно перерисовать цикл на pV-диаграмме (рис.13), так как там работа в любом процессе численно равна площади под графиком этого процесса. Из графика видно, что наибольшая работа совершается газом на участке 2–3.

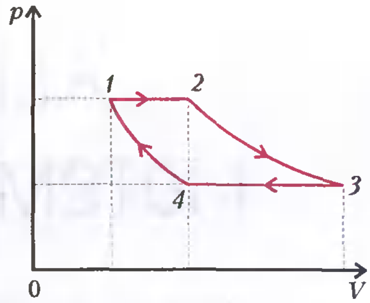


Рис. 13

С3. Из закона Ома $U = IR$, формулы для сопротивления $R = \rho\frac{l}{S}$ и формулы связи между напряженностью и напряжением $U = El$ получаем формулу для напряженности поля в проводнике: $E = \frac{\rho}{S}I$, где ρ – удельное сопротивление меди, S – площадь поперечного сечения проводника. Учитывая, что при последовательном соединении проводников сила тока в них одинакова, получим

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2.$$

Отметим, что экзаменуемый мог воспользоваться законом Ома в локальной форме, т.е. для плотности тока: $j = \frac{1}{\rho}E$, и сразу получить формулу для напряженности. Инструкция по проверке должна учитывать возможность различных вариантов правильных решений.

С4. Средняя энергия теплового движения молекул одноатомного газа равна

$$E_{ср} = \frac{3}{2}kT,$$

где k – постоянная Больцмана, а максимальная кинетическая энергия выбиваемых при фотоэффекте электронов равна

$$E_{к\,max} = \frac{hc}{\lambda} - A_{вых}.$$

Приравнивая эти энергии, получим

$$T = \frac{2}{3k}\left(\frac{hc}{\lambda} - A_{вых}\right) \approx 1,6\cdot 10^4 \text{ К}.$$

С5. Из второго закона Ньютона $mg + qE = ma$ найдем ускорение шарика. Затем из формулы кинематики $v^2 = 2ah$ найдем скорость шарика перед ударом. Переданный плите импульс равен изменению импульса шарика:

$$\Delta p = 2mv = 2m\sqrt{2\left(g + \frac{qE}{m}\right)h} \approx 0,07 \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

Другой вариант решения этой задачи – с помощью закона сохранения энергии.

Рекомендуемая литература

1. *Орлов В.А., Ханнанов Н.К., Фадеева А.А.* Единый государственный экзамен. 2003–2004. Контрольные и измерительные материалы. – М.: Просвещение, 2003

2. *Орлов В.А., Фадеева А.А., Ханнанов Н.К.* Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. 2004. – М.: Интеллект-Центр, 2003

3. *Кабардин О.Ф., Орлов В.А., Кабардина С.И.* Тесты по физике для классов физико-математического профиля. – М.: Вербум-М, 2002

4. *Гладышева Н.К., Нурминский И.И. и др.* Тесты. Физика. 10–11 классы. Учебно-методическое пособие. – М.: Дрофа, 2003

XLIV Международная математическая олимпиада

В XLIV Международной математической олимпиаде (ММО), проходившей с 7 по 19 июня 2003 года в Токио, приняли участие 446 школьников из 82 стран мира.

В команду России были включены одиннадцатиклассники *Николай Гравин, Александр Смирнов, Дмитрий Ширяев* (все – Санкт-Петербург, ФМЛ 239), *Юрий Волков* (Кемерово, Классический лицей), *Олег Гольберг* (Ростов-на-Дону, школа 8) и десятиклассник *Андрей Бадзян* (Челябинск, ФМЛ 31); последние двое участвовали в ММО во второй раз.

В таблице приведены результаты выступления наших школьников (каждая задача оценивалась в 7 баллов):

	1	2	3	4	5	6	Σ	Медаль
О.Гольберг	7	3	7	7	7	7	38	золотая
Н.Гравин	7	7	7	7	7	1	36	золотая
А.Бадзян	7	7	0	7	7	1	29	золотая
Ю.Волков	7	3	0	7	7	0	25	серебряная
Д.Ширяев	7	7	0	7	1	1	23	серебряная
А.Смирнов	2	5	0	7	1	1	16	бронзовая

Следует отметить, что Олег Гольберг и Николай Гравин вошли в десятку лучших участников олимпиады.

Приведем также результаты (по количеству медалей) некоторых других команд:

	Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали
Китай	5	1	0
США	4	2	0
Корея	2	4	0
Вьетнам	2	3	1
Канада	2	0	3
Румыния	1	4	1
Япония	1	3	2
Турция	1	3	1
Венгрия	1	3	1
Украина	1	2	3
Великобритания	1	2	3
Белоруссия	1	2	2
Казахстан	1	2	2
Тайвань	1	2	2
Германия	1	2	1
Польша	1	2	0
Таиланд	1	1	3
Аргентина	1	1	2

(все перечисленные команды выступали в полных составах – по 6 участников).

Выражаем благодарность Министерству образования РФ, стипендиальному фонду В.Потанина, компании «Apple», банку «Союзный», компании «Форексис», оказавшим большую помощь в организации участия команды России в Международной математической олимпиаде.

Мы также благодарим тренеров национальной команды России А.Я.Белова, С.Л.Берлово, И.И.Богданова, А.И.Гарбера, А.А. Глазырина, В.Л.Дольникова, Д.В.Карпова, П.А.Кожевникова, М.Я. Пратусевича, Г.Р.Челнокова за подготовку наших школьников.

Задачи олимпиады

1. Пусть A – подмножество множества $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$, содержащее в точности 101 элемент. Докажите, что найдутся числа $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ из S такие, что множества

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \text{ для } j = 1, 2, \ldots, 100$$

будут попарно пересекающимися.

(Бразилия)

2. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что число

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

является натуральным.

(Болгария)

3. Дан выпуклый шестиугольник, у которого для каждой пары противоположных сторон выполняется условие: отношение расстояния между серединами этих сторон к сумме длин этих сторон равно $\sqrt{3}/2$. Докажите, что все углы этого шестиугольника равны. (Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ имеет три пары противоположных сторон: AB и DE, BC и EF, CD и FA.)

(Польша)

4. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник. Обозначим через P, Q и R основания перпендикуляров, опущенных иэ точки D на прямые BC, CA и AB соответственно. Докажите, что $PQ = QR$ тогда и только тогда, когда биссектрисы углов ABC и ADC пересекаются на прямой AC.

(Финляндия)

5. Пусть n – натуральное число и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – действительные числа такие, что $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

а) Докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right|\right)^2 \le \frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - x_j\right)^2 .$$

б) Докажите, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют арифметическую прогрессию.

(Ирландия)

6. Пусть p – простое число. Докажите, что существует простое число q такое, что при любом целом n число $n^p - p$ не делится на q.

(Франция)

Решения задач

Приведем решения задач, предложенные нашими участниками на олимпиаде.

1 (А.Бадзян). Пусть D_1 – множество различных (неупорядоченных) пар разностей $(x_k - x_l)$, $x_k \in A, x_l \in A, x_k \ne x_l$. Число элементов множества D_1 не больше $101 \cdot 100 = 10100$.

Пусть m – наибольшее возможное число элементов t_i множества S таких, что $t_i - t_j \notin D_1$, и $X = \{t_1, \ldots, t_m\}$. Тогда для любого $t \in S$, $t \notin X$ можно выбрать $t_i \in X$ такое, что $t - t_i \in D_1$, следовательно, $m + 10100m \ge 1000000 \Rightarrow m > 99$.

Итак, $m \ge 100$, т.е. искомый набор $t_1, \ldots, t_{100}$ существует.

2 (Д.Ширяев). Пусть $n = 2ab^2 - b^3 + 1$, тогда из условия $n \in \mathbf{N}$ и $a^2 \vdots n$. Отсюда

$$2ab^2 \equiv b^3 - 1 \pmod{n} \Rightarrow 2a^2b^2 \equiv$$

$$\equiv a\left(b^3 - 1\right) \Rightarrow a\left(b^3 - 1\right) \equiv 0 \Rightarrow a\left(2b^3 - 2\right) \equiv 0.$$

Но

$$2ab^3 - \left(b^4 - b\right) \equiv 0 \Rightarrow 2a \equiv b^4 - b$$

(все сравнения по модулю n). Итак,

$$m = b^4 - b - 2a \vdots n. \qquad (*)$$

По условию, $n = (2a - b)b^2 + 1 > 0$, откуда $2a - b \ge 0$.

I случай: $2a - b = 0$, что дает серию $(k, 2k)$.

II случай: $2a - b > 0$, т.е. $2a - b \ge 1$. Тогда из условия $a^2 \vdots n$ следует

$$a^2 \ge n = (2a - b)b^2 + 1 \Rightarrow a^2 \ge b^2 + 1 \Rightarrow a > b.$$

Значит,

$$2a - b > a \Rightarrow n > ab^2 + 1 > ab^2 \Rightarrow a^2 > ab^2 \Rightarrow a > b^2.$$

Следовательно,

$$n = (2a - b)b^2 + 1 > \left(2b^2 - b\right)b^2 + 1 =$$

$$= 2b^4 - b^3 + 1 > b^4 > b^4 - b - 2a.$$

Тогда из $(*)$ вытекает, что $b^4 - b - 2a \le 0$. Случай $b^4 - b - 2a = 0$ дает серию $\left(8k^4 - k, 2k\right)$. Если же $b^4 - b - 2a < 0$, то из $(*)$ получаем

$$-\left(b^4 - b - 2a\right) \ge n = 2ab^2 - b^3 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a\left(1 - b^2\right) \ge b^4 - b^3 - b + 1 = (b - 1)\left(b^3 - 1\right).$$

При $b > 1$ имеем

$$2a\left(1 - b^2\right) < 0 < (b - 1)\left(b^3 - 1\right).$$

Значит, $b = 1$, что дает серию $(2k, 1)$.

Ответ: $(k, 2k), \left(8k^4 - k, 2k\right), (2k, 1), k \in \mathbf{N}$.

3 (Н.Гравин). Введем обозначения $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$, $\overline{CD} = \overline{c}$, $\overline{DE} = \overline{d}$, $\overline{EF} = \overline{e}$, $\overline{FA} = \overline{f}$, $|\overline{a}| = a$, $|\overline{b}| = b$, $|\overline{c}| = c$, $|\overline{d}| = d$, $|\overline{e}| = e$, $|\overline{f}| = f$, тогда

$$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} + \overline{e} + \overline{f} = 0. \qquad (1)$$

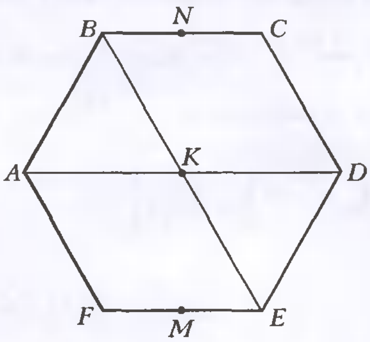


Рис. 1

Пусть N и M – середины сторон BC и EF (рис.1), тогда

$$2\overline{NM} = \overline{BF} + \overline{CE} \Rightarrow 4NM^2 = BF^2 + CE^2 + 2\overline{BF} \cdot \overline{CE} =$$

$$= BF^2 + CE^2 + \left|\overline{BF}\right|^2 + \left|\overline{CE}\right|^2 - \left|\overline{BF} - \overline{CE}\right|^2 =$$

$$= 2\left(BF^2 + CE^2\right) - \left|\overline{b} + \overline{e}\right|^2,$$

так как

$$\overline{BF} - \overline{CE} = -\overline{a} - \overline{f} - \overline{c} - \overline{d} = \overline{b} + \overline{e}$$

в силу (1). По условию, $NM = \frac{\sqrt{3}}{2}(b + e)$, следовательно,

$$3(b + e)^2 = 4NM^2 =$$

$$= 2\left(BF^2 + CE^2\right) - \left|\overline{b} + \overline{e}\right|^2 \Rightarrow 2\left(BF^2 + CE^2\right) =$$

$$= 3(b + e)^2 + \left|\overline{b} + \overline{e}\right|^2 \ge 3(b + e)^2 + \left|\left|\overline{b}\right| - \left|\overline{e}\right|\right|^2 =$$

$$= 4\left(b^2 + be + e^2\right) \Rightarrow \left(\overline{a} + \overline{f}\right)^2 + \left(\overline{c} + \overline{d}\right)^2 \ge 2\left(b^2 + be + e^2\right).$$

Написав аналогичные неравенства для других пар противоположных сторон и сложив их, получим

$$a^2 + 2\overline{a} \cdot \overline{f} + f^2 + c^2 + 2\overline{c} \cdot \overline{d} +$$

$$+ d^2 + b^2 + 2\overline{b} \cdot \overline{c} + c^2 + e^2 + 2\overline{e} \cdot \overline{f} +$$

$$+ f^2 + d^2 + 2\overline{d} \cdot \overline{e} + e^2 + a^2 + 2\overline{a} \cdot \overline{b} + b^2 \ge$$

$$\ge 2\left(b^2 + be + e^2 + c^2 + cf + f^2 + d^2 + da + a^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{a} \cdot \overline{f} + \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{e} \cdot \overline{f} + \overline{d} \cdot \overline{e} + \overline{a} \cdot \overline{b} \ge be + cf + da \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{a} \cdot \overline{f} + \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{e} \cdot \overline{f} + \overline{d} \cdot \overline{e} + \overline{a} \cdot \overline{b} +$$

$$+ \overline{b} \cdot \overline{e} + \overline{c} \cdot \overline{f} + \overline{a} \cdot \overline{d} \ge 0,$$

так как

$$-be \le \overline{b} \cdot \overline{e}, \ -cf \le \overline{c} \cdot \overline{f}, \ -da \le \overline{a} \cdot \overline{d}. \qquad (2)$$

Мы получили $\left(\overline{a} + \overline{c} + \overline{e}\right) \cdot \left(\overline{b} + \overline{d} + \overline{f}\right) \ge 0$. С другой стороны, из (1)

$$\overline{a} + \overline{c} + \overline{e} = -\left(\overline{b} + \overline{d} + \overline{f}\right) \Rightarrow \left(\overline{a} + \overline{c} + \overline{e}\right) \cdot \left(\overline{b} + \overline{d} + \overline{f}\right) \le 0.$$

Значит, все написанные неравенства обращаются в равенства. Тогда из (2) следует параллельность противоположных сторон шестиугольника и равенство

$$\overline{a} + \overline{c} + \overline{e} = \overline{b} + \overline{d} + \overline{f} = 0. \qquad (3)$$

Выберем точку K так, что $\overline{BK} = \overline{CD} = \overline{c}$ (см.рис.1), тогда из (3) $\overline{KA} = \overline{e}$, значит, $KAFE$ – параллелограмм $\Rightarrow \overline{EK} = \overline{FA} = \overline{f} \Rightarrow AK \parallel FE \parallel BC \parallel KD \Rightarrow K \in AD$. Аналогично, $K \in BE$ и $\overline{KD} = \overline{b}$. Тогда

$$\Delta AKB \sim \Delta DKE \Rightarrow b = ke, \ f = kc, \ d = ka.$$

Пусть

$$\angle ABC = \angle DEF = \alpha, \ \angle BCD = \angle EFA = \beta,$$

$$\angle CDE = \angle FAB = \gamma,$$

тогда из равенства

$$\left(\overline{a} + \overline{f}\right)^2 + \left(\overline{c} + \overline{d}\right)^2 = 2\left(b^2 + be + e^2\right)$$

следует

$$a^2 - 2af\cos\gamma + f^2 + c^2 - 2cd\cos\gamma + d^2 = 2\left(b^2 + be + e^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{-2\left(k^2 + k + 1\right)e^2 + \left(k^2 + 1\right)\left(a^2 + c^2\right)}{4kac}.$$

Тогда

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=-\frac{1}{2ace}\left(a^3+c^3+e^3\right)+$$

$$+\frac{k^2+1}{4kace}\left(a^2c+a^2e+c^2a+c^2e+e^2a+e^2c-2\left(a^3+c^3+e^3\right)\right)\le$$

$$\le-\frac{3}{2},$$

так как

$$\frac{k^2+1}{2k}\ge1,\ a^3+c^3+e^3\ge3\sqrt[3]{a^3c^3e^3}=3ace$$

и

$$a^2c+a^2e+c^2a+c^2e+e^2a+e^2c-2\left(a^3+b^3+c^3\right)=$$

$$=-\left((a+c)(a-c)^2+(a+e)(a-e)^2+(c+e)(c-e)^2\right)\le0.$$

С другой стороны, $\alpha+\beta+\gamma=360°$, $0<\alpha,\beta,\gamma<180°$, поэтому $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\ge-\frac{3}{2}$, причем равенство достигается только в случае $\alpha=\beta=\gamma=120°$. Действительно,

$$\alpha+\beta=360°-\gamma\Rightarrow90°<\frac{\alpha+\beta}{2}<180°\Rightarrow t=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}<0.$$

Кроме того,

$$-180°<\alpha-\beta<180°\Rightarrow$$

$$\Rightarrow0<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le1\Rightarrow\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$$

$$=(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos\left(360°-(\alpha+\beta)\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=2t\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2t^2-1\ge2t+2t^2-1=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\ge-\frac{3}{2}.$$

Неравенство обращается в равенство, если

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1\ \text{ и }\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{2},$$

т.е. $\alpha=\beta=120°\Rightarrow\gamma=120°$.

4 (А.Смирнов). Заметим, что точки C, D, P, Q лежат на одной окружности с диаметром CD, так как $\angle CQD=\angle CPD=90°$ (рис.2). Поэтому, по теореме синусов,

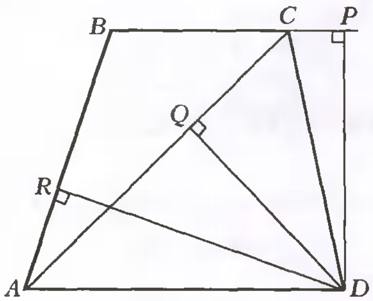


Рис. 2

$PQ=CD\sin\angle PCQ$. Аналогично, $RQ=AD\sin\angle RAQ\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{PQ}{RQ}=\frac{CD}{AD}\frac{\sin\angle PCQ}{\sin\angle RAQ}.$$

Но $\sin\angle PCQ=\sin\angle BCA$, так как эти углы либо равны, либо в сумме дают 180°. Аналогично, $\sin\angle RAQ=\sin\angle BAC\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{\sin\angle PCQ}{\sin\angle RAQ}=\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{BC},$$

по теореме синусов из ΔBAC. Значит,

$$\frac{PQ}{RQ}=\frac{CD}{AD}\frac{AB}{BC},$$

откуда

$$PQ=RQ\Leftrightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}.$$

Пусть BL и DM, соответственно, биссектрисы ΔABC и ΔADC. Тогда $\frac{AB}{BC}=\frac{AL}{CL}$ и $\frac{AD}{CD}=\frac{AM}{CM}$. Значит, $PQ=RQ\Leftrightarrow L=M$, что и требовалось доказать.

Замечание. Условие вписанности четырехугольника $ABCD$, как видно из приведенного решения, является лишним.

5 (Ю.Волков). Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$4\left(\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_j-x_i\right)\right)^2\le\frac{4\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_j-x_i\right)^2.\qquad(1)$$

Пусть $x_{i+1}-x_i=y_i\ge0$, тогда

$$x_j-x_i=\left(x_j-x_{j-1}\right)+\left(x_{j-1}-x_{j-2}\right)+\ldots+\left(x_{i+1}-x_i\right)=$$

$$=y_i+\ldots+y_{j-1}$$

и для $n+1$ переменной $x_1,\ldots,x_{n+1}$ неравенство (1) примет вид

$$\left(\sum_{1\le i\le j\le n}\sum_{k=i}^{j}y_k\right)^2\le\frac{n^2+2n}{3}\sum_{1\le i\le j\le n}\left(\sum_{k=i}^{j}y_k\right)^2.\qquad(2)$$

Левая часть (2) содержит y_m, если $i\le m\le j$, поэтому при фиксированном m в левой части (2) y_m встречается $m(n-m+1)$ раз, т.е. левая часть равна

$$\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot i\cdot(n-i+1)\right)^2.$$

Заменив каждое слагаемое $\left(\sum_{k=i}^{j}y_k\right)^2$ на $(j-i+1)^2$ слагаемых вида $\left(\frac{\sum_{k=i}^{j}y_k}{j-i+1}\right)^2$, мы получим в правой части (2) $l=\sum_{s=1}^{n}(n-s+1)s^2$ слагаемых, так как число сумм $\sum_{k=i}^{j}y_k$, содержащих s слагаемых, равно $n-s+1$. Можно показать, что $l=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$. Применим к сумме $A=a_1^2+\ldots+a_l^2$ в правой части (2) неравенство $A\ge\frac{\left(a_1+\ldots+a_l\right)^2}{l}$:

$$A\ge\frac{1}{l}\left(\sum_{1\le i\le j\le n}(j-i+1)^2\sum_{k=i}^{j}\frac{y_k}{j-i+1}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{l}\left(\sum_{1\le i\le j\le n}(j-i+1)\sum_{k=i}^{j}y_k\right)^2=\frac{1}{l}B^2.$$

Заметим, что B при фиксированном m содержит

$\frac{n(n-m+1)(n+1)}{2}$ слагаемых y_m. Значит,

$$\frac{n^2+2n}{3}A \ge \frac{n^2+2n}{3}\cdot\frac{1}{l}B^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot i\cdot(n-i+1)\right)^2,$$

т.е. неравенство доказано. Осталось заметить, что оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$a_1 = \ldots = a_l \Leftrightarrow y_1 = \ldots = y_n,$$

т.е. когда $x_1,\ldots,x_n$ образуют арифметическую прогрессию.

6 (О.Гольберг).

Лемма 1. *Пусть* $a\in \mathbf{N}$, $a\ge 2$, $k,l\in\mathbf{N}$, *тогда*

$$\left(a^k-1, a^l-1\right) = a^{(k,l)}-1 \quad \left((m,n) = НОД(m,n)\right).$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по $k + l$.

База: при $k + l = 2$ утверждение очевидно.

Пусть для всех $k\ge l$ таких, что $k+l\le n$, утверждение леммы верно. Тогда при $k + l = n + 1$

$$\left(a^k-1,a^l-1\right) = \left(a^k-a^l,a^l-1\right) = \left(a^l\left(a^{k-l}-1\right),a^l-1\right) =$$

$$= \left(a^{k-l}-1,a^l-1\right) = a^{(k-l,l)}-1 = a^{(k,l)}-1.$$

Лемма доказана.

Возьмем $M = \frac{p^p-1}{p-1} = p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+1 \Rightarrow M\ge 2$, так как $p\ge 2$.

Лемма 2. *Существует простой делитель s числа M такой, что* $s\not\equiv 1\left(mod p^2\right)$.

Доказательство. Предположим, что для любого $s\in\mathbf{P}$, $M\,\vdots\, S$ выполняется $s\equiv 1\left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$. Пусть $M = p_1\cdot\ldots\cdot p_k$, $p_i\in\mathbf{P}$, тогда $p_i\equiv 1\Rightarrow M\equiv 1$ – противоречие, так как

$$M = 1+p+p^2\cdot A\equiv 1+p\not\equiv 1$$

(все сравнения по модулю p^2).

Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что у числа M есть простой делитель q такой, что $q-1 \not\vdots\, p^2$. Докажем, что тогда q – искомое число. Из того, что $p^p-1\,\vdots\, q$, следует $(p,q)=1$, поэтому $p^{q-1}-1\,\vdots\, q$ (малая теорема Ферма). Тогда из леммы 1 имеем $p^{(p,q-1)}-1\,\vdots\, q$. Число p простое, поэтому либо $q-1\,\vdots\, p$, либо $(p,q-1)=1$ и тогда $p-1\,\vdots\, q$, что невозможно, так как если $p\equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$, то

$$M = p^{p-1}+\ldots+p+1\equiv 1+\ldots+1 = p\equiv 1(\mathrm{mod}\, q)\Rightarrow M \not\vdots\, q.$$

Значит, $q-1\,\vdots\, p$ и при этом $q-1 \not\vdots\, p^2$. Тогда $q = 1+pm$, $m \not\vdots\, p$. Предположим, что выбранное q не подходит. Тогда существует $n\in\mathbf{Z}$ такое, что

$$n^p-p\,\vdots\, q\Rightarrow (n,q)=1,$$

так как $(p,q)=1$. Отсюда, по малой теореме Ферма,

$$n^{q-1}-1\,\vdots\, q\Rightarrow n^{pm}-1\,\vdots\, q\Rightarrow 1\equiv n^{pm}\equiv\left(n^p\right)^m\equiv p^m\,(\mathrm{mod}\, q),$$

так как $n^p\equiv p(\mathrm{mod}\, q)$. Значит, $p^m-1\,\vdots\, q$. Но $p^p-1\,\vdots\, q$ и по лемме 1

$$p^{(m,p)}-1\,\vdots\, q,\text{ где } (m,p)=1,$$

поэтому $p-1\,\vdots\, q$, что невозможно, как было показано выше.

Значит, для любого $n\in\mathbf{Z}$ получаем $n^p-p \not\vdots\, q$.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, Д.Терешин

XXXIV Международная физическая олимпиада

Очередная международная физическая олимпиада школьников проходила в Тайбэе – главном городе Тайваня – со 2 по 11 августа 2003 года. В олимпиаде приняли участие 238 школьников из 64 стран. По разным причинам команды ряда стран, в том числе очень хорошо подготовленная команда Китая, пропустили эту олимпиаду.

Как и в предыдущие годы, подготовка сборной команды России проводилась на базе Московского физико-технического института (МФТИ). Кандидаты в сборную были отобраны по результатам Всероссийской олимпиады школьников по физике 2002 года. В период подготовки к олимпиаде кандидаты три раза приглашались на учебно-тренировочные и квалификационные сборы в МФТИ. С ребятами работали преподаватели кафедры общей физики, а также студенты физтеха – победители международных олимпиад прошлых лет. В общей сложности продолжительность всех сборов составила четыре с половиной недели (при этом кандидаты в сборную команду не освобождались от выпускных экзаменов в школе).

По результатам сборов и двух Всероссийских олимпиад (2002 и 2003 гг.) в команду были включены:

Фортунатов Антон – школа 5 г.Долгопрудного Московской обл. (учитель физики – В.А.Овчинкин),

Аверьянов Петр – ФТШ г.Санкт-Петербурга (учитель – А.А.Американцев),

Рыжиков Михаил – лицей 17 г.Северодвинска (учитель – В.Н.Толмасов),

Родионов Павел – Московская государственная Пятьдесят седьмая школа (учителя – Е.А.Выродов и Д.А.Александров),

Егоров Михаил – школа 63 г.Рязани (учителя – А.П.Соколов и М.В.Чиркин).

Сборную команду России возглавляли профессор МФТИ С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин.

Участникам олимпиады были предложены три теоретические задачи, которые оценивались в 12, 10 и 8 баллов, и одна экспериментальная задача (20 баллов). Таким образом, каждый из участников олимпиады мог набрать 50 баллов. Как теоретические, так и экспериментальные задачи были исключительно трудными и, главное, очень громоздкими. Достаточно сказать, что условия теоретических задач занимали 14 страниц текста, а экспериментальной – 16 страниц. Это, конечно же, отразилось на результатах выступления школьников. Только два участника смогли преодолеть рубеж в 40 баллов.

По итогам выступления на олимпиаде были отмечены 153 участника. Золотые медали получили 20 школьников, серебряные – 39 и бронзовые – 38. Кроме того, 56 участников были награждены грамотами.

Результаты наших ребят таковы: Фортунатов Антон набрал 36,7 баллов (золотая медаль), Родионов Павел – 31,1 б. (серебряная медаль), Рыжиков Михаил – 27,0 б. (серебряная медаль), Егоров Михаил – 26,6 б. (бронзовая медаль), Аверьянов Петр – 21,2 б. (грамота). Такое выступление следует признать вполне удовлетворительным. К сожалению, ребята не смогли рационально распределить время между задачами различной трудности, в результате чего не успели решить относительно простые задачи. В целом с теоретическими заданиями они справились лучше, чем с экспериментальными. В этом проявляется общее отставание экспериментальной подготовки в нашей средней школе, а также отсутствие специализированной, хорошо оснащенной современными приборами лаборатории для подготовки сборной команды в области эксперимента. Следует отметить, что такие лаборатории созданы во многих странах (Китай, США, Индия, Тайвань, Иран, Корея, Индонезия и др.)

Сравнительные неофициальные результаты выступления на олимпиаде двенадцати лучших команд представлены в таблице:

№	Страна	Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали	Сумма баллов
1	США	3	2		175,0
2	Корея	3	2		169,3
3	Тайвань	3	1	1	163,5
4	Иран	2	3		159,5
5	Индонезия	1	2	1	149,6
6	Россия	1	2	1	142,6
7	Германия	2	1	1	142,1
8	Австралия		5		139,0
9	Индия	2		1	137,5
10	Польша	1		4	134,7
11	Украина		2	3	129,8
12	Румыния	1	2	1	129,3

Из таблицы видно, что, как и в прежние годы, на олимпиаде успешно выступили команды ряда стран азиатского региона. Это не удивительно. В этих странах разработаны специальные государственные программы работы с одаренными детьми. Успешное выступление команды на олимпиаде школьников рассматривается как дело государственного престижа. Созданы все условия для подготовки сборных команд (организационно-технические и финансовые), на период подготовки команды к олимпиаде (а он в разных странах занимает от полугода до года) ребята освобождаются от всех других занятий и экзаменов. К сожалению, подготовка сборной команды России проходит в более жестких условиях – без значительной финансовой поддержки со стороны государства и спонсоров и в более короткие сроки.

Еще раз подчеркнем, что в последние годы конкуренция становится все более острой. В этих условиях часто решающим фактом в борьбе за лидерство становится аккуратная записей результатов с указанием размерностей измеряемых величин, четко выполненный рисунок или схема, правильно выбранный масштаб графиков, грамотно оцененные ошибки измерений и т.д.

Условия теоретических задач (и ответы к ним) приведены ниже. Здесь же кратко расскажем об экспериментальном задании, которое было посвящено исследованию поляризованного света в нематических жидких кристаллах. В первой части эксперимента предлагалось детально исследовать характеристики лазерного диода и полупроводникового фотоприемника и определить область линейных режимов работы этих устройств. Во второй половине работы следовало исследовать электрооптические характеристики двух различных по своим свойствам жидкокристаллических ячеек. При выполнении экспериментального задания нужно было последовательно собрать на оптической скамье три разные установки, построить по экспериментальным данным серию графиков, определить ряд параметров жидкокристаллических ячеек и сделать оценку точности измерений.

В целом экспериментальное задание оказалось для всех участников олимпиады чрезмерным по объему. Наши ребята успели разобраться в физике явлений (далеко выходящих за пределы программы средней школы), однако при выполнении самих экспериментов они в ряде случаев проявили определенную поспешность и даже небрежность (особенно при построении графиков). Максимальный балл, полученный нашими ребятами за экспериментальную работу, равнялся 13,9 (А.Фортунатов).

Теоретический тур

Задача 1. Качания падающего грузика

Твердый цилиндрический стержень радиусом R закреплен горизонтально над землей. Грузик массой m прикрепили невесомой нерастяжимой нитью длины $L\,(L > 2\pi R)$ к верхней точке стержня A, как показано на рисунке 1. Грузик подняли до уровня точки A так, что нить расположилась горизонтально, и отпустили. Грузик, который можно считать материальной точкой, движется только в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси стержня. Ускорение свободного падения g. Примем точку O за начало системы координат. Пусть грузик находится в точке P, а нить направлена по касательной к поверхности стержня и касается ее в точке Q. Длину отрезка QP обозначим s. Касательный (тангенциальный) и нормальный (радиальный) единичные векторы обозначим $\vec{e}_t$ и $\vec{e}_r$ соответственно. Угол отклонения θ отрезка OQ от вертикальной оси x (совпадающей по направлению с OA) будем отсчитывать против часовой стрелки. При $\theta = 0$ начальная длина $s = L$, гравитационную потенциальную энергию в этом положении примите равной нулю. Обозначим скорости изменения величин θ и s при движении грузика через $d\theta/dt$ и ds/dt соответственно. Если не оговорено иное, то все векторы скоростей и их величины рассматриваются в системе отсчета, связанной с неподвижной точкой O.

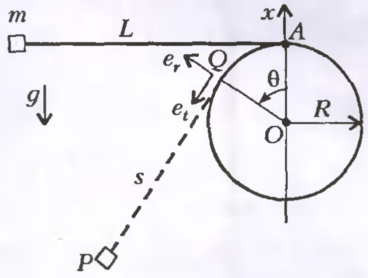


Рис. 1

Часть А

В этой части задачи рассматривается движение грузика при постоянно натянутой нити. Выразите через введенные ранее величины (s, θ, $d\theta/dt$, ds/dt, R, L, g, $\vec{e}_t$ и $\vec{e}_r$) следующее:

a) связь между величинами $d\theta/dt$ и ds/dt; (0,5 балла)

b) скорость движения точки касания Q относительно точки O; (0,5 б.)

c) скорость грузика относительно движущейся точки Q в момент, когда он находится в точке P; (0,7 б.)

d) скорость грузика относительно точки O в момент, когда он находится в точке P; (0,7 б.)

e) проекцию ускорения грузика на ось, задаваемую вектором $\vec{e}_t$, относительно точки O в момент, когда он находится в точке P; (0,7 б.)

f) потенциальную энергию грузика в момент, когда он находится в точке P; (0,5 б.)

g) скорость грузика в самой нижней точке его траектории. (0,7 б.)

Часть В

В этой части задачи отношение L к R имеет значение $\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{16} = 3{,}534 + 3{,}352 = 6{,}886$. Определите:

h) чему равна скорость грузика в момент, когда участок нити QP еще остается отрезком прямой и имеет минимальную длину (выразите ответ через g и R); (2,4 б.)

i) чему равна скорость грузика, когда он находится в высшей точке своей траектории с другой стороны стержня (выразите ответ через g и R). (1,9 б.)

Часть С

В этой части задачи на одном конце нити по-прежнему находится грузик массой m, а к другому концу нити, переброшенной через стержень, прикреплен более тяжелый груз массой M, как показано на рисунке 2. Груз массой M также можно считать материальной точкой. Первоначально грузик массой m подняли до уровня точки A так, что участок нити длиной L расположился горизонтально. Грузик отпускают без начальной скорости, и система начинает двигаться в вертикальной плоскости, при этом грузы не сталкиваются. Считайте, что при скольжении нити по поверхности стержня сила трения пренебрежимо мала, однако после остановки благодаря силе трения покоя груз далее не движется.

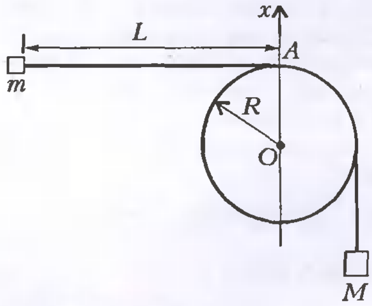


Рис. 2

j) Будем считать, что груз массой M действительно опускается на расстояние D (причем $L - D \gg R$) и останавливается. Чтобы грузик массой m сделал полный оборот вокруг стержня (до значения $\theta = 2\pi$) и при этом оба участка нити, не касающиеся стержня, оставались натянутыми, необходимо, чтобы отношение $\alpha = D/L$ превысило некоторое критическое значение $\alpha_к$. Пренебрегая малыми величинами порядка R/L (и меньше), получите оценку величину $\alpha_к$ через отношение M/m. (3,4 б.)

Задача 2. Пьезоэлектрический кристаллический резонатор под действием переменного напряжения

Рассмотрим однородный стержень длиной l (в ненапряженном состоянии) и площадью сечения A (рис.3). Его длина изменяется на Δl, когда силы одинаковой величины F и противоположного направления приложены к его концам перпендикулярно их поверхностям. Механическое напряжение T на концах стержня равно F/A. Относительное изменение его длины, т.е. $\Delta l/l$, называется деформацией S стержня. В терминах напряжения и деформации закон Гука может быть выражен так:

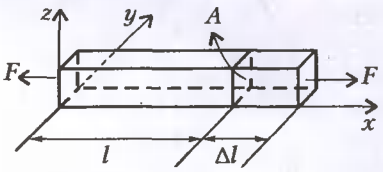


Рис. 3

$$T = YS, \text{ или } \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{l},$$

где Y называется модулем Юнга стержня. Заметим, что напряжение сжатия соответствует силе $F < 0$ и уменьшению длины, т.е. $\Delta l < 0$. Такое напряжение является поэтому отрицательным по величине и связано с давлением p как $T = -p$. Для стержня однородной плотности ρ скорость распространения продольных волн (т.е. скорость звука) вдоль стержня есть $u = \sqrt{Y/\rho}$.

Часть А. Механические свойства

Однородный полубесконечный стержень плотностью ρ расположен между $x = 0$ и $x = \infty$ (рис.4). Сначала он находится в покое и ненапряжен. Затем с помощью поршня к концу стержня ($x = 0$) прикладывается малое давление p в течение короткого промежутка времени Δt; при этом генерируется волна давления, распространяющаяся со скоростью u вправо.

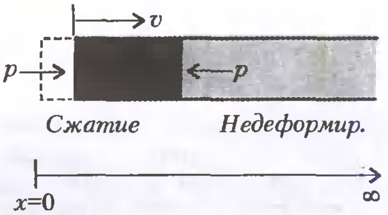


Рис. 4

a) Если поршень вызывает движение левого конца стержня с постоянной скоростью v (см. рис.4), то каково механическое напряжение T и давление p на левом конце в течение промежутка времени Δt? Ответ должен быть выражен только через величины ρ, u, v. (1,6 б.)

b) Рассмотрите продольную волну в стержне, распространяющуюся вдоль направления x. Для некоторого сечения, координата которого в ненапряженном стержне равна x, введем его смещение $\xi(x,t)$ за время t (рис.5) и предположим, что

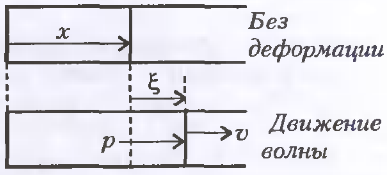


Рис. 5

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x - ut),$$

где ξ_0 и k – постоянные. Найдите соответствующую скорость v этого сечения, деформацию S и давление p как функции x и t. (2,4 б.)

Часть В. Электромагнитные свойства, включая пьезоэлектрический эффект

Рассмотрим пластину кристалла кварца длиной b, толщиной h и шириной w (рис.6). Ее длина и толщина определены вдоль осей x и z соответственно. Тонкие слои металлического покрытия на верхней и нижней поверхностях служат электродами. Электрические контакты, служащие также опорами (рис. 7), припаяны к центрам электродов. Центры электродов могут считаться закрепленными при продольных колебаниях вдоль оси x. Рассматриваемый кристалл кварца имеет плотность $\rho = 2{,}65 \cdot 10^3$ кг/м^3 и модуль Юнга $Y = 7{,}87 \cdot 10^{10}$ Н/м^2. Длина пластины $b = 1{,}00$ см, а ширина w и толщина h таковы что $h \ll w$ и $w \ll b$. Когда ключ K разомкнут, мы предполагаем, что в кварцевой пластине возбуждаются только продольные колебания в виде стоячих волн в направлении x. Для стоячих волн частотой $f = \omega/(2\pi)$ смещение $\xi(x,t)$ сечения пластины с равновесным положением x в зависимости от времени t может быть записано в виде

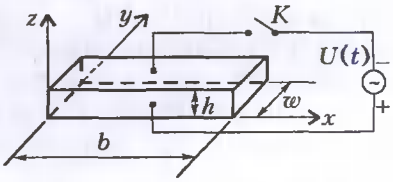


Рис. 6

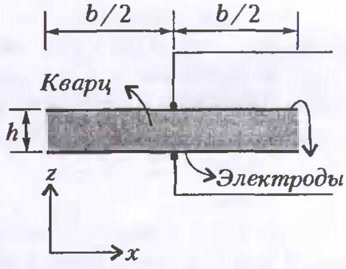


Рис. 7

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 g(x) \cos\omega t, \quad 0 \le x \le b,$$

где ξ_0 – положительная постоянная, а функция координаты

$g(x)$ имеет вид

$$g(x) = B_1 \sin k\left(x - \frac{b}{2}\right) + B_2 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right),$$

причем $g(x)$ имеет максимальное значение, равное 1, а $k = \omega/u$. Напомним, что центры электродов остаются в покое и что левый и правый торцы пластины свободны и должны иметь нулевое механическое напряжение (и давление).

c) Определите величины B_1 и B_2 для продольной стоячей волны в кварцевой пластине. (1,2 б.)

d) Определите две наинизшие частоты, на которых могут быть возбуждены продольные (вдоль координаты x) стоячие волны в кварцевой пластине. (1,2 б.)

Пьезоэлектрический эффект – это особое свойство кристаллов кварца. Сжатие или растяжение кристалла создает электрическое напряжение в поперечном направлении кристалла, и наоборот – внешнее электрическое напряжение, приложенное к кристаллу, вызывает его сжатие или растяжение в поперечном направлении в зависимости от полярности напряжения. Следовательно, механические и электрические колебания в кристалле кварца могут взаимодействовать и взаимовозбуждаться. Для описания пьезоэлектрического эффекта обозначим плотности поверхностных зарядов на верхнем и нижнем электродах $-\sigma$ и $+\sigma$ соответственно, когда кварцевая пластина находится в электрическом поле $\overline{E}$, направленном по оси z. Обозначим деформацию и механическое напряжение в пластине в направлении x через S и T соответственно. Тогда пьезоэлектрический эффект в кристалле кварца описывается следующей системой уравнений:

$$S = \frac{1}{Y}T + d_p E,$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E,$$

где $1/Y = 1{,}27 \cdot 10^{-11}$ м^2/Н – коэффициент упругой деформации (т.е. величина, обратная модулю Юнга) в постоянном электрическом поле, $\varepsilon_T = 4{,}06 \cdot 10^{-11}$ Ф/м – восприимчивость при постоянном механическом напряжении, а $d_p = 2{,}25 \cdot 10^{-12}$ м/В – это пьезоэлектрический коэффициент.

Рассмотрим случай, когда ключ K на рисунке 6 замкнут. Переменное напряжение $U(t) = U_m \cos\omega t$ в этом случае приложено между электродами, и в кварцевой пластине в направлении z появляется однородное электрическое поле $E(t) = U(t)/h$. Когда достигается стационарное состояние, в кварцевой пластине возникает в направлении x продольная стоячая волна с угловой частотой ω. Для однородного электрического поля E длина волны λ и частота f продольной стоячей волны в пластине связаны соотношением $\lambda = u/f$, где скорость u определяется уравнением $u = \sqrt{Y/\rho}$. Но, как показывает первое уравнение системы, формула $T = YS$ уже не выполняется, хотя определения деформации и напряжения остаются неизменными. Торцы пластины остаются свободными с нулевым механическим напряжением.

e) Поверхностная плотность заряда σ на нижнем электроде как функция координаты x и времени t может быть представлена в виде

$$\sigma(x,t) = \left(D_1 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) + D_2\right)\frac{U(t)}{h},$$

где $k = \omega/u$. Принимая во внимание уравнения системы, найдите выражения для D_1 и D_2. (2,2 б.)

f) Полный поверхностный заряд $Q(t)$ на нижнем электроде связан с $U(t)$ соотношением

$$Q(t) = \left(1 + \alpha^2\left(\frac{2}{kb}\operatorname{tg}\frac{kb}{2} - 1\right)\right)C_0 U(t).$$

Найдите выражение для C_0, а также выражение и численное значение для α^2. (1,4 б.)

Задача 3

Часть А. Масса нейтрино и распад нейтрона

Покоящийся в лабораторной системе отсчета свободный нейтрон массой m_n распадается на три невзаимодействующие частицы: протон, электрон и антинейтрино. Масса покоя протона составляет m_p, масса покоя антинейтрино m_ν предполагается ненулевой и намного меньшей массы покоя электрона m_e. Обозначим скорость света в вакууме c. Измеренные значения масс равны:

$$m_n = 939{,}56563 \text{ МэВ}/c^2,\ m_p = 938{,}27231 \text{ МэВ}/c^2,$$

$$m_e = 0{,}5109907 \text{ МэВ}/c^2.$$

В дальнейшем все энергии и скорости берутся в лабораторной системе отсчета. Пусть E – полная энергия электрона, появляющегося в результате распада.

a) Найдите максимально возможное значение $E_{\max}$ энергии E и соответствующую ему скорость v_m антинейтрино (при $E = E_{\max}$). Оба ответа должны быть выражены через массы покоя частиц и скорость света. Полагая, что $m_\nu \le 7{,}3$ эВ$/c^2$, найдите численные значения величин $E_{\max}$ и v_m/c с точностью до трех значащих цифр. (4,0 б.)

Часть В. Левитация под действием света

Прозрачная стеклянная полусфера (полушарие) радиусом R и массой m имеет коэффициент преломления n. В среде, окружающей полусферу, коэффициент преломления равен единице. Параллельный цилиндрический пучок монохроматического лазерного излучения, однородный по сечению, падает нормально на центральную часть плоской поверхности полусферы (рис.8). Ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено вертикально вниз. Радиус сечения лазерного луча δ намного меньше R. Стеклянная полусфера и луч лазера цилиндрически симметричны относительно оси z. Стеклянная полусфера не поглощает лазерного излучения. Для того чтобы сделать отражение лазерного луча при входе и выходе незначительным, поверхность полусферы покрыта тонким слоем прозрачного материала. Оптический путь лазерного луча при прохождении этого слоя также незначителен.

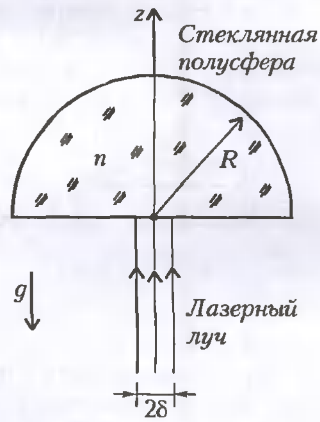


Рис. 8

b) Пренебрегая членами порядка $(\delta/R)^3$ и выше, найдите мощность лазера, необходимую для того, чтобы скомпенсировать силу тяжести стеклянной полусферы. *Указание*: при θ, намного меньших единицы, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Московская студенческая олимпиада по физике

25 мая 2003 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел московский региональный тур Всероссийской олимпиады по физике среди студентов технических вузов. К участию в олимпиаде были приглашены все ведущие технические вузы Москвы. Состав каждой команды – 10 студентов до 3 курса включительно. Командный зачет проводился по 5 лучшим результатам членов команды.

Участникам олимпиады был предложен вариант из 10 задач (в зависимости от сложности задачи оценивались от 6 до 10 баллов) и разрешалось пользоваться любой литературой.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (84 балла), второе место – команда Московского института стали и сплавов (МИСиС) (83 б.), третье место – команда Московского авиационного института (МАИ) (70 б.).

В личном зачете первое место завоевал В.Семенеко (МГТУ им.Н.Э.Баумана, 24 балла), второе место – В.Потапов (МГТУ им.Н.Э.Баумана, 23 б.), третье место – Г.Беланов (МИСиС, 20 б.).

Избранные задачи олимпиады

1. Два космических аппарата в начальный момент времени находятся на расстоянии l друг от друга. Вектор скорости первого аппарата направлен всегда на второй аппарат. Вектор скорости второго всегда перпендикулярен линии, соединяющей оба аппарата. Определите путь и перемещение каждого аппарата до точки встречи, если скорость первого вдвое больше, чем второго.

2. Горизонтально расположенная доска массой M и длиной L может вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс доски. Над одним концом доски удерживается вертикально цепочка длиной l и массой m так, что она нижним концом касается поверхности доски. В начальный момент времени цепочку отпускают. Определите угловую скорость доски в момент падения последнего звена цепочки, если $M \gg m$.

3. Два тела могут перемещаться без трения по направляющим. Первое тело, массой M, перемещается по горизонтальной направляющей; второе, массой m, перемещается по вертикальной направляющей и находится ниже первого. Тела связаны нерастяжимой нитью длиной l. Определите период малых колебаний этой системы.

4. Невесомый поршень в горизонтально расположенном цилиндре радиусом r замыкает одноатомный газ объемом V, температурой T_0 и давлением $2p_0$, где p_0 – давление окружающей среды. Сначала поршень перемещается внутри цилиндра без трения со скоростью u и толкает перед собой шар массой M и радиусом $R < r$. Коэффициент трения между шаром и поршнем, шаром и цилиндром равен единице. Определите скорость, с которой покатится шар после отрыва от поршня, если процесс расширения газа под поршнем считать адиабатическим.

5. Космический корабль находится на экваторе малой планеты радиусом R. Сила тяжести, действующая на корабль, равна Mg, где M – масса корабля, g – ускорение тяготения. Планета вращается с угловой скоростью $\omega \ll \sqrt{g/R}$. Максимальная сила тяги двигателей корабля равна Mg. Сколько времени потребуется кораблю, чтобы выйти на орбиту вокруг планеты?

6. К двум металлическим конусам, почти соприкасающимся своими вершинами и находящимися на одной оси, приложена разность потенциалов $\Delta\varphi$. Определите распределение поверхностного заряда на поверхностях конусов как функцию расстояния от вершины, если полуугол при вершине обоих конусов равен α_0.

7. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен теплоизолирующим поршнем на две равные части объемом V каждая. Давление одноатомного газа в левой половине сосуда p, в правой $2p$, а температура одна и та же и равна T. Систему предоставили самой себе. Определите конечное давление в обеих частях сосуда после завершения переходных процессов, если поршень перемещается внутри сосуда без трения.

8. Вдоль оси одновиткового контура радиусом R пролетает с постоянной скоростью маленький постоянный магнит с магнитным моментом, ориентированным вдоль оси контура. Определите расстояние между магнитом и центром контура, при котором ЭДС индукции в контуре максимальна.

9. На отверстие в экране падает плоская световая волна интенсивности I_0. Для точки наблюдения, находящейся на оси отверстия за экраном, в отверстии помещается 100 зон Френеля. Какой станет интенсивность света в точке наблюдения, если закрыть зоны с номерами 1, 2, 4, 8 и т.д.?

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

Анкета читателя

(*Начало см. на с. 25*)

Масленникова Галина Вайсовна – д.Гостицы Ленинградской обл.,
Месяц Сергей Дмитриевич – с.Малая Сердоба Пензенской обл.,
Московкина Елена Геннадьевна – г.Глазов,
Новоселов Анатолий Рафаилович – г.Тверь,
Политова Ольга Михайловна – г.Кострома,
Попов Валентин Павлович – с.Плеханово Липецкой обл.,
Сидельников Георгий – г.Белгород,
Соловьева Александра – г.Ижевск,
Чистяков Андрей – г.Фокино Брянской обл.,
Чусовитина Людмила Николаевна – г.Новосибирск,
Юткина Людмила – с.Желобово Рязанской обл.

Футболки с логотипом журнала «Квант» получили

Аспарян Аркадий – г.Волгодонск Ростовской обл.,
Аспарян Владимир – г.Волгодонск Ростовской обл.,
Гагуа Ираклий – г.Москва,
Дроздов Виктор Борисович – г.Рязань,
Ермолова Екатерина – п/о Суетово Смоленской обл.,
Можаев Александр Петрович – г.Москва,
Москва Владимир – г.Москва,
Сидорова Лия Александровна – г.Ярославль,
Холодкова Светлана Васильевна – г.Канск,
Чудакова Екатерина – г.Москва.

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Комиссия сообщила верный итог голосования. Пусть в голосовании приняли участие N избирателей, комиссия проверила $0,6N$ бюллетеней и оказалось, что $0,8 \cdot 0,6N$ человек проголосовало за Любимчика Джо, а $0,1 \cdot 0,6N$ – за Зазнайку Билла. Даже если все остальные голоса в $0,4N$ бюллетенях будут отданы за Зазнайку Билла, то всего он наберет не более $0,06N + 0,4N = 0,46N$ голосов, что меньше количества голосов $0,48N$, уже отданных за Любимчика Джо.

2. Рассмотрим вспомогательную клетку $PQRS$ (рис.1). Несложно убедиться в следующих равенствах треугольников:

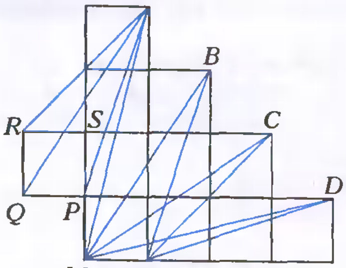


Рис. 1

$\Delta AMP = \Delta DMN$,
$\Delta APQ = \Delta BNM$,
$\Delta AQR = \Delta CMN$.
Следовательно, искомая сумма углов равна углу NAR, т.е. равна 45°.

3. Рассмотрим произвольную расстановку коней, удовлетворяющую условию задачи. Пусть K – конь, располагающийся в горизонтали, ограничивающей конфигурацию коней сверху. Тогда он может бить самое большее 4 коней. Конфигурация коней на шахматной доске, в которой каждый конь бьет ровно 4 других коня, возможна (рис.2).

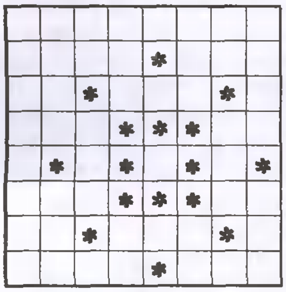


Рис. 2

4. Случай $n = 2$ проверяется непосредственно.
Пусть $n > 2$, и тогда $a > 1$. Если $n = ac$, где c – натуральное, то из тождества задачи следует $ab + 2a - b = ac$, или $b(a-1) = a(c-2)$. Но числа a и $a - 1$ взаимно просты. Отсюда следует, что b делится на a, и, поскольку $b \neq a$, то $b > a$. Перепишем тождество задачи в виде $n = ab + 2a - b$. Поскольку обе части этого тождества делятся на b, то $2a$ делится на b. Но $b \neq 2$ (иначе $a = 1$, что невозможно). Следовательно, $b = 2a$. В этом случае $2n = 2(ab + 2a - b) = 4a^2$ – квадрат натурального числа.

5. Прежде всего подсчитаем общее число пар врагов. У каждого из n сотрудников по 3 врага, т.е. всего получаем $3n$ пар врагов. Но здесь каждая пара врагов учитывалась дважды, поэтому на самом деле имеется $\frac{3n}{2}$ пар врагов. Так как это – целое число, то n – четное число.
Рассмотрим двух врагов A и B. У A должно быть еще ровно 2 врага, поэтому общее число сотрудников не меньше 4. Докажем, что оно также не больше 6. Допустим обратное – что всего сотрудников не меньше 7. Рассмотрим любых семерых из них, в том числе A и B. Тогда среди пятерых остальных ровно двое – враги A (ибо всего у A три врага, в том числе B). Поэтому остальные трое – друзья A и, следовательно, враги B. Таким образом, у B не меньше 4 врагов. Противоречие.

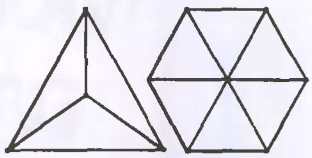


Рис. 3

Итак, в коллективе от 4 до 6 сотрудников. Так как n – четное число, то $n = 4$ или $n = 6$. Примеры показывают, что обе эти возможности осуществимы (на рисунке 3 сотрудники обозначены жирными точками и каждые два врага соединены отрезком).

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2003 г.)

6. Пусть в фирме насчитывается n рабочих, при этом каждый из них в течение дня изготавливает m сувениров, а шеф – S сувениров. Условие задачи запишем в виде равенства

$$S = \frac{nm + S}{n+1} + 13,$$

которое можно преобразовать к виду

$$S = m + 13 + \frac{13}{n}.$$

В правой части последнего равенства должно быть целое число. Поскольку натуральное $n > 1$, то это возможно лишь тогда, когда $n = 13$. Итак, в фирме трудится 13 рабочих.

7. Из условия задачи следует, что

$$x + y = [x+y] + \frac{1}{3},$$

$$y + z = [y+z] + \frac{1}{3},$$

$$z + x = [z+x] + \frac{1}{3}.$$

Сложив все три равенства, получаем

$$2(x+y+z) = [x+y] + [y+z] + [z+x] + 1.$$

Значит, $2(x+y+z)$ – целое число, т.е. либо число $x + y + z$ целое, либо отличается от $[x + y + z]$ на $\frac{1}{2}$. Оба варианта возможны. Например,

при $x = y = z = \frac{2}{3}$ имеем $x + y + z = [x+y+z] = 2$,

при $x = y = z = \frac{1}{6}$ имеем $x + y + z = \frac{1}{2}$, $[x+y+z] = 0$.

Итак, число $[x + y + z]$ отличается от $x + y + z$ либо на 0, либо на $\frac{1}{2}$.

8. Покажем, что искомая точка B является точкой касания данной окружности и любой из двух внутренних окружностей, имеющих отрезок AC в качестве хорды (на рисунке 4, соответственно, точки B_1 или B_2).

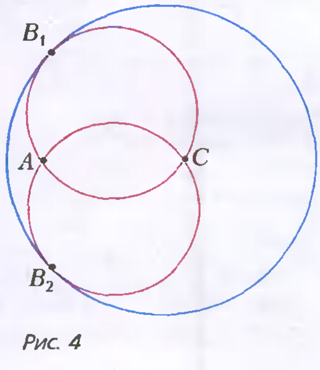


Рис. 4

Множеством точек M, для которых угол AMC имеет заданную величину φ, является пара дуг с концами в точках A и C, симметричных относительно прямой AC. Если начертить эти дуги для различных значений φ ($0 < \varphi < 180°$), то получится семейство дуг, которые покрывают всю плоскость за исключени-

---

Поправка

В решении задачи 2 «Кванта» для «младших» школьников» (см. «Квант», 2003, №5, с.57) была допущена неточность. Приводим более корректное решение.

Для того чтобы число ЖУКИ = ЖУК × 10 + И делилось на число ЖУК, надо, чтобы на ЖУК делилось число И. Это возможно в единственном случае, когда И = 0. Следовательно, n = 10, а Ж, У, К могут быть любыми неравными друг другу цифрами, кроме нулей.

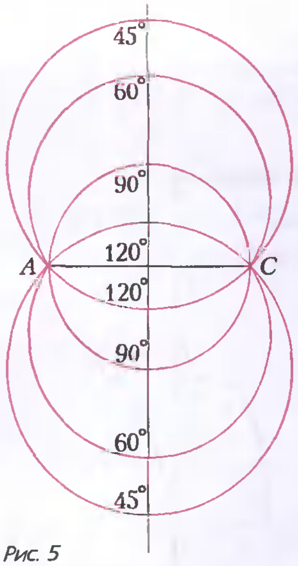


Рис. 5

ем прямой AC. На рисунке 5 изображено несколько таких дуг, и на каждой написано, какому значению φ она соответствует.

Будем теперь рассматривать только точки M, лежащие на заданной окружности. Нам нужно выбрать из них такую, для которой угол AMC имеет наибольшую величину. Через каждую точку заданной окружности, за исключением концевых точек содержащего отрезок AC диаметра, проходит какая-нибудь одна дуга нашего семейства. Из этих дуг нужно выбрать ту, которая соответствует наибольшему значению угла AMC.

Проведем дугу l, касающуюся заданной окружности в точке B. Тогда из точки B отрезок AC виден под наибольшим углом. Действительно, любая точка M заданной окружности, отличная от B, лежит вне сегмента, стягиваемого дугой l, поэтому $\angle AMC < \angle ABC$.

Для построения точки B с помощью циркуля и линейки рассчитаем радиус r окружности, внутренним образом касающейся заданной окружности радиуса R и проходящей через точки A и C. Возможны 2 варианта расположения центра O заданной окружности по отношению к отрезку AC: точка O принадлежит отрезку AC (рис.6,*а*)), точка O находится вне отрезка AC (рис.6,*б*)).

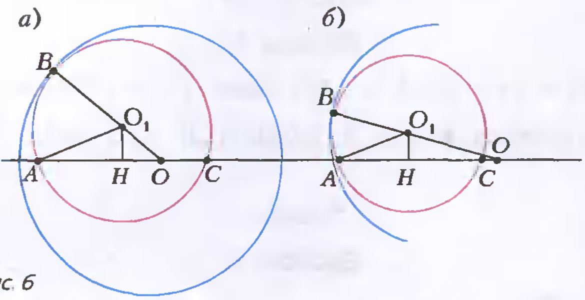


Рис. 6

Обозначим $OA = a$, $OC = c$ и опустим перпендикуляр O_1H из центра O_1 внутренней окружности на отрезок AC; $OO_1 = R - r$. В первом случае $AH = HC = \frac{a+c}{2}$, $OH = HC - OC = \frac{a-c}{2}$. Поскольку

$$O_1H^2 = AO_1^2 - AH^2 = OO_1^2 - OH^2,$$

то отсюда получаем

$$r^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = (R-r)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2,$$

или, после преобразований,

$$r = \frac{R}{2} + \frac{ac}{2R}.$$

Аналогично, во втором случае получаем

$$r = \frac{R}{2} - \frac{ac}{2R}.$$

Отсюда вытекает следующий способ построения точки B.

1) Продлеваем отрезок AC до пересечения с заданной окружностью. Определяем диаметр заданной окружности, ее радиус R (делением диаметра пополам), ее центр – точку O, отрезки $AO = a$, $OC = c$.

2) Если точка O принадлежит отрезку AC, то для нахождения радиуса r внутренней окружности используем формулу $r = \frac{R}{2} + \frac{ac}{2R}$, во втором случае – формулу $r = \frac{R}{2} - \frac{ac}{2R}$.

3) Используя для нахождения отрезка длины $\frac{ac}{2R}$ теорему о пропорциональности отрезков, отсекаемых на сторонах острого угла параллельными прямыми (рис.7), последовательно строим отрезки длины $\frac{ac}{2R}$, $\frac{R}{2}$, r.

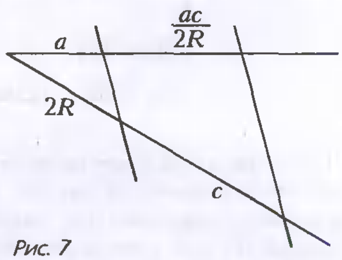


Рис. 7

4) Находим центры O_1, O_2 внутренних окружностей как точки пересечения двух множеств точек: серединного перпендикуляра к отрезку AC и окружности с центром в точке A радиуса r.

5) Проводим лучи OO_1, OO_2 до пересечения с заданной окружностью в искомых точках B_1 и B_2.

Задача имеет два решения.

9. Пусть n – число, образованное цифрами телефонного номера. Умножив число $5n$ на 2, получим число $10n$, сумма цифр у которого такая же, как и у числа n. При умножении на 2 цифра 1 дает сумму цифр 2, цифра 2 дает 4, 3 дает 6, 4 – 8, 5 – 1, 6 – 3, 7 – 5, 8 – 7, 9 – 9. Получаются все цифры от 1 до 9. Их сумма равна 45. Следовательно, сумма цифр телефонного номера 45.

10. Построим набор из некоторых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2002}$, обладающий следующими свойствами:

1) в записи каждого из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2002}$ используется ровно 4 разряда, при этом в старших разрядах допускается запись цифры 0;

2) если к произвольному числу, дающему при делении на 2003 остаток $n > 0$, приписать справа последовательно числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то в результате получится число, делящееся на 2003.

Сначала подберем число a_1. Пусть некоторое число M_1 при делении на 2003 дает остаток 1, а число $M_1 \cdot 10^4 + a_1$ делится на 2003. Тогда на 2003 делится и число $1 \cdot 10^4 + a_1$, откуда $a_1 = 0015$.

Далее, пусть некоторое число M_2 при делении на 2003 дает остаток 2, а число $M_2 \cdot 10^8 + a_1 \cdot 10^4 + a_2$ делится на 2003. Тогда на 2003 делится и число $2 \cdot 10^8 + 15 \cdot 10^4 + a_2$, откуда $a_2 = 1778$.

Если некоторое число M_3 при делении на 2003 дает остаток 3, а число $M_3 \cdot 10^{12} + a_1 \cdot 10^8 + a_2 \cdot 10^4 + a_3$ делится на 2003, тогда на 2003 делится и число $3 \cdot 10^{12} + 15 \cdot 10^8 + 1778 \cdot 10^4 + a_3$, откуда $a_3 = 1372$.

Аналогично, последовательно определяем числа $a_4, a_5, \ldots, a_{2002}$. Запишем числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2002}$ подряд одно за другим без пробелов: 001517781372... – получим некоторое число, состоящее из 8008 цифр. В заданной по условию задачи последовательности 123456789101112... непременно встретится (и не один раз!) фрагмент, содержащий построенный нами 8008-значный «отрезок». Выберем любое место, где этот «отрезок» встречается, и обозначим через M число, образованное всеми цифрами, стоящими слева от этого «отрезка». Если M делится на 2003, то все в порядке. Если же M при делении на 2003 дает остаток $n > 0$, то припишем к M следующие $4n$ цифр ~ получившееся число поделится на 2003.

Очевидно, задача обобщается на случай любого натурального делителя, а не только 2003. Иными словами, имеет место не очень-то очевидный факт: от начала описанной в условии задачи последовательности можно всегда «отрубить» кусок, который поделится на любое заранее заданное число.

Замечание1. Один из участников конкурса, восьмиклассник Bar Goueta из Израиля, предъявил 1437-значное число 123...514515, удовлетворяющее всем требованиям задачи.

Замечание 2. Изящное решение этой задачи прислал семиклассник Дима Бабичев из город Набережные Челны.

Рассмотрим последовательность чисел

$$\begin{array}{l} \mathbf{1} \\ 1234567891, \\ 1234567891\ldots1234567890\mathbf{1234567891}, \\ \ldots \end{array} \qquad (*)$$

Первое число последовательности равно 1. Каждое следующее число строится по способу, указанному в условии задачи, а именно: последовательно выписываются числа натурального ряда до тех пор, пока не выпишется предыдущее число последовательности $(*)$ (повторяющиеся фрагменты чисел выделены жирным шрифтом).

По принципу Дирихле, в последовательности $(*)$ найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на 2003. Разность этих чисел представляет собой число вида $A\cdot 10^k$ и делится на 2003 без остатка. Так как 10^k на 2003 не делится, то на 2003 делится число A, по способу своего построения удовлетворяющее всем требованиям задачи. Оно и будет искомым.

Насыщенные и ненасыщенные водяные пары

1. $p_1 = 10\left(p - (\varphi/100)p_н\right) + p_н = 118{,}6$ кПа.

2. $A = 2\left(\dfrac{Q}{\nu} - RT\ln 2\right)$, где $\nu = 1$ моль.

3. $m_п = \dfrac{4}{3}(m - M) = 8$ г; $V = \dfrac{m_п RT}{Mp_а} = 13{,}8$ л, где $M = 18\cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воды, $p_а = 10^5$ Па – атмосферное давление.

4. $p_н = \dfrac{M_в p - \rho RT}{M_в - M_п} \approx 2668$ Па.

Вологодский государственный педагогический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант письменного экзамена

1. *Указание.*

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101} = B.$$

Но $AB = \dfrac{1}{101} < \dfrac{1}{100}$, т.е. $A^2 < \dfrac{1}{100}$, и $A < \dfrac{1}{10}$.

Аналогично, $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100} = 2A < \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\dfrac{100}{101} = \dfrac{3}{2}B$.

Но $2A\cdot\dfrac{3}{2}B = \dfrac{3}{101}$, откуда $A < \sqrt{\dfrac{3}{404}} < \dfrac{1}{11}$.

2. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. *Указание.* Уравнение равносильно такому:

$$\arcsin 2x = \arccos x.$$

Его следствием будет уравнение $2x = \sqrt{1 - x^2}$.

3. $(1; +\infty)$. **4.** 0; $\log_{2/3}\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

5. От $\dfrac{40}{3}$ % до 16 %.

6. $\dfrac{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}{2}$, где $r_1 = \dfrac{1}{2}$, $r_2 = \dfrac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

Вариант устного экзамена

1. Можно. *Указание.* При любом натуральном k имеет место равенство

$$\frac{1}{3^k\cdot 2} = \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}\cdot 2},$$

поэтому

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}\cdot 2}$$

при любом $n \in \mathbf{N}$.

2. Эскиз графика изображен на рисунке 8.

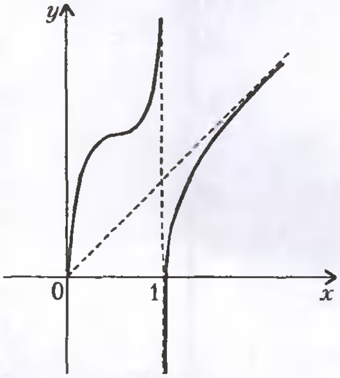


Рис. 8

3. $\varnothing$ при $a < 0$, $\dfrac{1 + \sqrt{1 + 16a^2}}{2}$ при $a \ge 0$.

4. $\dfrac{a^2 b}{12}$. *Указание.* Легко проверить, что пересечением исходных пирамид будет треугольная пирамида с основанием ABC и высотой $S_2O = b/2$.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $a = 5$, $b = 3125$. **2.** 9. **3.** 6 ящиков в первой машине и 15 – во второй. **4.** 7 : 5. **5.** $[-3; -1] \cup (1; 3]$. **6.** $\pm\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = \dfrac{v_0}{2}$. **2.** $R = \dfrac{gL_0}{g - \omega^2 L_0}$. **3.** $a = \dfrac{2qr}{\Delta B}$.

4. $p_2 = p_1 + \dfrac{2Q}{3V} = 2\cdot 10^5$ Па. **5.** $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Вариант 2

1. $H = \dfrac{v_0^2}{2g}$. **2.** $F_1 = \dfrac{x}{L}F$. **3.** $\varphi_A - \varphi_C = \dfrac{3}{5}BvL$.

4. $A = Q_1\dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \approx 113$ кДж. **5.** $F = \dfrac{fl}{L + l} \approx 15{,}4$ см.

Вариант 3

1. $t = \dfrac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gH}}{g}$. **2.** $m = M\dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$.

3. $v_1 = \sqrt{\dfrac{3pVM_2}{M_1(M_1 + M_2)}}$, $v_2 = \sqrt{\dfrac{3pVM_1}{M_2(M_1 + M_2)}}$.

4. $n = \dfrac{U}{\mathcal{E} - Ir} = 100$. **5.** $x = \dfrac{F}{2}$. **6.** $v_н = \dfrac{3}{4}\sqrt{gR}$.

7. $Q_1 = Q\dfrac{R}{L}\left(\left(1 - \dfrac{R^2}{L^2}\right)^{-2} - 1\right)$.

Московский государственный институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\sqrt{2}$. **2.** 12. **3.** $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup\{3\}\cup[4;5)$. **4.** $\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi n}{7}$, $-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$. **5.** 1. **6.** В 2 раза. **7.** 36. **8.** $y=-2{,}4x+$ $+24{,}09$. **9.** 1,5. **10.** $1\frac{1}{12}$. **11.** 0,25; −1,5.

Вариант 2

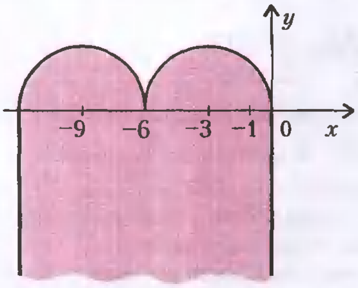


Рис. 9

1. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **2.** 0.

3. $\left(-\infty;-2\sqrt[3]{29}\right]\cup(0;1]$.

4. $(\log_3 5; 1{,}5)$. **5.** $(5;2)$, $(5;-2)$. **6.** 16. **7.** $25\sqrt{2}$.

8. См. рис.9.

9. $\frac{13\pi}{6}+4\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **10.** 0; ±1; $\pm2{,}5$.

11. $(110;120]$ мин.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v=\frac{2\pi rn}{\cos\alpha}\approx 5$ м/с.

2. а) $m=\frac{F_1-F_2}{2g}=50$ г; б) $F=\sqrt{F_1F_2}\approx 1$ Н.

3. $v_1=\frac{v}{2\cos\alpha}=\frac{v}{\sqrt{2}}$; $E=0$.

4. $p=p_0\frac{(t+273)}{(t_0+273)(1-(\delta/100\%))}\approx 0{,}89\cdot10^5$ Па.

5. $t=\frac{1}{c_в}\left(\frac{Q}{m}-\frac{\lambda}{2}\right)=50$ °C.

6. а) $q=\frac{2CU}{3}$; б) $U_1=\frac{10U}{9}$, $U_2=-\frac{U}{9}$.

7. $\frac{R_3}{R_1}=\frac{k}{4}=4$. **8.** $U=\frac{2\pi\nu LN_2I_m}{\sqrt{2}N_1}\approx 3{,}1$ В.

9. $k=\left(\frac{\Gamma_2+1}{\Gamma_1+1}\right)^2\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}=\frac{32}{27}$.

10. Ошибочное утверждение – 4).

Вариант 2

1. $a=\frac{v_1v_2}{L}=10$ м/с^2. **2.** $\alpha=\operatorname{arctg}\mu_2\approx 11°$.

3. $l=\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)H=12$ м. **4.** $\varphi=\left(1-\frac{\Delta p}{p_н}\right)100\%\approx 57\%$.

5. $\delta=\frac{\lambda}{\lambda+r}\approx 0{,}12$. **6.** $\frac{q_1}{q_2}=-n^3=-8$.

7. $v=\frac{jk}{\rho}\approx 1$ мм/ч. **8.** $\lambda=\frac{2\pi cC_0}{I}\sqrt{U_0^2-U^2}$.

9. $n=\sqrt{k}=1{,}5$.

10. Ошибочное утверждение – 5).

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 21 день, 28 дней.

2. $y_{\min}=0$, если $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; $y_{\max}=3+2\sqrt{2}$, если $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. *Указание.* $y(x)=2\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

3. $1/8$; 4. **4.** $[0;1)\cup(9;+\infty)$. **5.** $(0;4)$, $l_{\min}=4\sqrt{17}$.

6. $x_{1,2}=\left(a-3\pm4\sqrt{-a}\right)/2$ при $a\le-9$;

$x_1=\left(a-3-4\sqrt{-a}\right)/2$, $x_2=(a+9)/2$ при $-9<a<-1$;

$x_1=(a+9)/2$, $x_2=(a+1)/2$ при $a>0$.

Указание. При $x\le0$ получаем уравнение $(2x-a+3)^2=-16a$. Это уравнение не имеет корней при $a>$ >0, при $a=0$ имеет единственный корень и имеет два разных неположительных корня при $a\le-9$ и при $-1\le a<0$. При $-9<a<-1$ оно имеет корни разных знаков. При $x>0$ имеем уравнение

$$4x^2-4(a+5)x+a^2+10a+9=0$$

с корнями $x_1=\frac{a+9}{2}$, $x_2=\frac{a+1}{2}>0$. При этом $x_1>0$ при $a>-9$, $x_2>0$ при $a>-1$. Сопоставляя рассмотренные случаи, приходим к ответу.

7. $\sqrt{3}/2$. *Указание.* В плоскости BST проведем $MF\parallel ST$. Секущая плоскость проходит через AM и AF, так что сечение – это треугольник AMN (рис.10). Пусть O – центр треугольника ABC, Q – основание высоты треугольника AMN, $MD\perp BT$, $FE\perp AK$, $OP\perp AN$. Докажите, что $BN=\frac{1}{3}BC$,

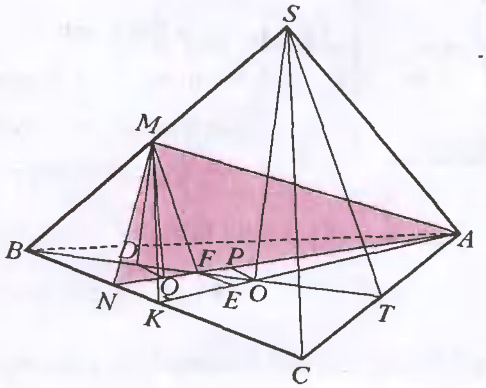


Рис. 10

затем найдите AN по теореме косинусов из треугольника ABC. Высоту MQ можно найти из прямоугольного треугольника MDQ, поскольку $MD=\frac{1}{2}SO$, $DQ=OP$ (ибо $DF=$ $=FO$), а OP находится из подобия треугольников APO и ANK.

Вариант 2

1. 60 км/ч. **2.** 0; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; π. **3.** 9. **4.** $\left(-\frac{4}{3};-1\right)$.

5. $2\sqrt{30}$.

6. $x_{1,2}=\left(a\pm\sqrt{a^2-4a+3}\right)^2$, $y_{1,2}=2a\pm2\sqrt{a^2-4a+3}$ при $a\in[3/4;1)\cup(3;+\infty)$; $x_1=0$, $y_1=\frac{4a-3}{a}$ и

$x_2 = \left(a + \sqrt{a^2 - 4a + 3}\right)^2$, $y_2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 4a + 3}$ при $0 < a < 3/4$.

7. R^2.

ФИЗИКА

Вариант 1

2. $s = 3{,}5$ м. **3.** $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4 \cdot 10^3$. **4.** См рис.11.

5. $A = \frac{\nu M}{3}(v_3 - v_1)^2 \approx 2987$ Дж, где $M = 28$ г/моль — молярная масса азота.

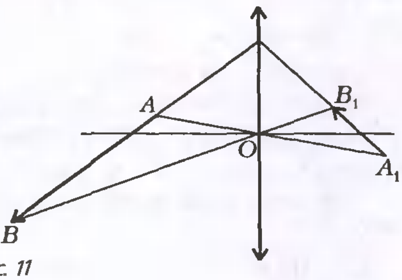


Рис. 11

6. $A_m = \frac{\mu mg}{2k}$. **7.** $v_1 = 0$, $v_2 = \sqrt{\frac{2L(2mg + qE)}{7m}}$, $v_3 = 2v_2$.

Вариант 2

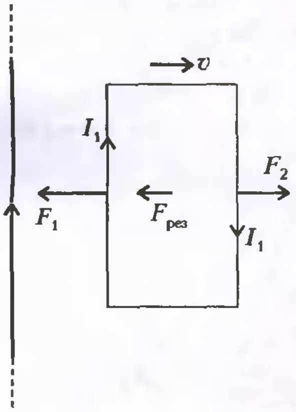


Рис. 12

2. См. рис.12.

3. $\Delta p_x = m(v_{2x} - v_{1x}) = 0{,}06 \cdot 0{,}5\pi(\sin 2{,}5\pi - \sin 0{,}5\pi) = 0$.

4. $\nu_{\min} = \frac{A}{h} \approx 5 \cdot 10^{14}$ Гц.

5. $F = g\cos\alpha\left((m_1 + m_2)\sin\alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\alpha\right) \approx 12{,}2$ Н.

6. $A = \frac{1}{2}\nu R\alpha\left(V_2^2 - V_1^2\right) \approx 0{,}13$ Дж.

7. $t = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Вначале давление над поршнем атмосферное, а давление вверху меньше на величину ρgH (давления определяются только равновесием поршня и жидкости и не зависят от присутствия пузырька). При всплывании пузырька давление в нем уменьшится от p_0 до $p_0 - \rho gH$, а объем возрастет до $Vp_0/(p_0 - \rho gH)$. С другой стороны, изменение объема равно xS, где x – смещение поршня. Отсюда получаем

$$x = \frac{V}{S}\frac{\rho gH}{p_0 - \rho gH}.$$

2. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$mv = MU_x, \quad mu = MU_y, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{MU^2}{2} + \frac{mu^2}{2}.$$

Исключая скорости второго тела U_x, U_y и $U^2 = U_x^2 + U_y^2$, имеем

$$M = m\frac{v^2 + u^2}{v^2 - u^2}.$$

3. Результирующая сила, действующая на одну из бусинок вдоль спицы, в начальном состоянии равновесия равна нулю:

$$mg\cos\alpha - \frac{kq^2\sin\alpha}{(2L\sin\alpha)^2} = 0,$$

откуда получаем

$$L = \frac{q\sqrt{k}}{2\sqrt{mg\cos\alpha\sin\alpha}}.$$

С появлением заряда $-Q$ на расстоянии x от бусинки эта сила будет равна

$$mg\cos\alpha + \frac{kqQ}{x^2} - \frac{kq^2\sin\alpha}{(2x\sin\alpha)^2}.$$

При $Q > \frac{q}{4\sin\alpha}$ сила всегда направлена вниз по спице, и нижний заряд притянет бусинку. В противном случае ситуация аналогична отталкиванию двух зарядов q и $q/(4\sin\alpha) - Q$, которое не может быть преодолено постоянной силой.

4. Надо разогнаться до первой космической скорости $v_{1к} = 8$ км/с, причем ускорение a не должно превышать нескольких g. Так, при $a = 2g$ время разгона равно $v_{1к}/a = 400$ с. Перегрузка при этом не превышает дозволенную. Участок подъема в атмосфере высотой H может занять время $H/u = 30$ км/0,3 км/с = 100 с, даже если явно занизить вертикальную скорость и завысить высоту, т.е. временем этого подъема можно пренебречь.

5. При слабом рывке прочность проволочки достаточна, чтобы поднять оба груза. Когда рывки становятся более резкими, растут силы натяжения. Пока грузы не оторвались от стола, абсолютные удлинеиия проволочки с каждой стороны одинаковы. Если бы проволочка свободно скользила в подвесе (как в подвижном блоке), натяжения тоже были бы одинаковы. Но из-за трения проволочка практически не скользит – два отрезка тянут независимо и удлинения с каждой стороны обеспечиваются растяжением проволочек. Поскольку абсолютные удлинения одинаковы, относительные заметно различаются. По закону Гука сила натяжения пропорциональна относительному удлинению, которое больше для короткой проволочки. Например, при отношении длин 1:3 натяжение короткой проволочки втрое больше. Поэтому первой рвется короткая проволочка. После разрыва натяжение короткого отрезка исчезает, уменьшается трение в подвесе, что облегчает проскальзывание. Это дополнительно может способствовать сохранению в целости оставшейся проволочки.

Вариант 2

1. Пусть $\mathcal{E}$ – ЭДС источника, r – его внутреннее сопротивление. При одном вольтметре в цепи идет ток $\frac{\mathcal{E}}{R + r}$, напряжение на нем $U_1 = \frac{\mathcal{E}R}{R + r}$. При двух параллельных вольтметрах напряжение $U_2 = \frac{\mathcal{E}R/2}{R/2 + r} = \frac{\mathcal{E}R}{R + 2r}$. Исключая ЭДС, получаем

$$r = R\frac{U_1 - U_2}{2U_2 - U_1}.$$

2. Пусть атмосферное давление p_0, сила трения F, площадь поршня S. Условие равновесия поршня и объединенный газовый закон дают:

$$p_0S - F = \frac{p_0STL}{T_0h}, \quad p_0S + F = \frac{p_0SL}{H},$$

откуда получаем

$$T = T_0\frac{h(2H - L)}{HL}, \quad F = p_0S\left(\frac{L}{H} - 1\right).$$

При $H < L/2$ $T < 0$, но тогда $F > p_0S$: поршень при охлаждении не сдвинется и условие задачи не выполнится. При $h < H$, $L/2 < H < L$ решение всегда имеет смысл; в частности, $0 < T < T_0$.

3. Пружины рвутся при растяжениях $x_1 = T/k$ (левая) и $x_2 = 2T/(3k)$ (правая). Если сначала рвется левая пружина, то правая при этом сжата на x_1. Даже если скорость тела в этот момент нулевая, правая пружина в фазе растяжения заведомо достигнет меньшей деформации x_2. Значит, минимальная начальная кинетическая энергия тела равна энергии деформации обеих пружин при величине деформации x_1:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{3kx_1^2}{2} = 4\frac{T^2}{2k},$$

откуда

$$v_1 = 2T\sqrt{\frac{1}{mk}}.$$

Скорость v_1 должна быть направлена вправо, иначе правая пружина порвется раньше. Поскольку правая пружина сжата с избытком, после ее разрыва у тела останется еще некоторая кинетическая энергия. Поэтому неправильно приравнивать начальную кинетическую энергию сумме максимальных энергий растяжения пружин:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{3kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{4T^2}{6k} + \frac{T^2}{2k} = \frac{7T^2}{6k},$$

откуда

$$v_2 = T\sqrt{\frac{7}{3mk}}.$$

Скорость v_2 меньше v_1. При начальной скорости v_2 тоже порвутся обе пружины, но сначала правая, а затем левая (при любом направлении этой скорости), что противоречит условию задачи.

4. Если на лепестках находятся одноименные заряды q, а расстояние между концами лепестков порядка их размера r, то сила отталкивания лепестков порядка их силы тяжести: $kq^2/r^2 \approx mg$. Потенциал оценим как $kq/r \approx \sqrt{kmg} \approx 10$ кВ.

5. При опрокидывании банки часть воды выливается, и в верхней части образуется пузырь воздуха. Затем холодная вода, как более тяжелая, частично вытекает из банки, заменяясь горячей, а также нагревается через стенки, так что температуры в банке и в сосуде постепенно выравниваются. В результате нагрева воздух в пузыре расширяется; кроме того, объем пузыря растет и за счет испарения воды. Пузырь вытесняет часть воды из банки. При достаточном увеличении объема пузыря банка становится легче воды и всплывает. Можно также сказать, что причиной подъема является превышение давления в пузыре на величину ρgh по сравнению с давлением воды на донышко банки, где h – высота пузыря.

Вариант 3

1. На левой границе луч не отклоняется. На внутренней границе преломление происходит по закону $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$, откуда (для малых углов) $\beta = \alpha n_1/n_2$. На правой границе угол преломления равен $\gamma = n_2(\alpha - \beta) = \alpha(n_2 - n_1)$. Это и есть угол отклонения. При $n_2 > n_1$ луч отклоняется вниз.

2. Пусть начальное давление в цилиндре p_0, начальная температура T_0, масса поршня m, конечное давление в верхнем отсеке p, площадь сечения цилиндра S. Поскольку объемы отсеков не изменились, из уравнения состояния газа следуют равенства

$$T_1 = T_0\frac{p}{p_0},\quad T_2 = T_0\frac{p + mg/S}{p_0},\quad T = T_0\frac{p + 2mg/S}{p_0}.$$

Видно, что температуры составляют арифметическую прогрессию:

$$T_2 - T_1 = T - T_2,$$

откуда получаем

$$T = 2T_2 - T_1.$$

3. Составляющая скорости вдоль магнитного поля, равная $v\cos\alpha$, не меняется. Поперечная составляющая скорости $v\sin\alpha$ постоянна по величине, но меняется по направлению, так что проекция траектории на плоскость, перпендикулярную полю, представляет собой окружность радиусом R, причем

$$\frac{mv^2\sin^2\alpha}{R} = ev\sin\alpha \cdot B.$$

Отсюда получаем

$$R = \frac{mv\sin\alpha}{eB}.$$

Электроны вращаются в одном направлении (по часовой стрелке вокруг вектора индукции, с учетом их отрицательного заряда) и встретятся после завершения одного оборота, следовательно,

$$t = \frac{2\pi R}{v\sin\alpha} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

За это время вдоль поля они пройдут искомое расстояние

$$l = v\cos\alpha \cdot t = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{eB}.$$

4. Число приседаний будет максимальным, если при движении вниз падать свободно, а в нижнем положении тратить минимум времени на разгон вверх так, чтобы поднять центр масс на заданное расстояние h (которое не может быть очень малым, иначе приседание не будет засчитано). Такое движение аналогично прыжкам мяча, подлетающего на высоту h, поэтому одно приседание займет время $2\sqrt{2h/g} \approx 2/3$ с при высоте $h = 0{,}5$ м. За минуту получится порядка 90 приседаний.

Заметим, что рассмотрение стадии торможения с ограничением по силе ног и мощности уменьшит результат, но не изменит его порядок величины.

5. Во вращающейся системе отсчета можно говорить о центробежной силе инерции, направленной от оси вращения наружу и складывающейся с силой притяжения к земле, направленной вниз. При достаточных значениях скорости вращения и расстояния от оси суммарная «тяжесть» может иметь составляющую в том числе и вверх по трубке. Легкие тела в жидкости всплывают, т.е. движутся против тяжести, что и объясняет эксперимент.

В инерциальной системе отсчета частицы воды в трубке движутся по окружностям под действием разности давлений. При достаточных значениях скорости вращения и расстояния от оси давление может возрастать с удалением от оси вдоль трубки. Легкие тела в жидкости перемещаются в сторону уменьшения давления.

Российский государственный педагогический университет им.А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. а) $\left(-\infty; -\frac{2n}{3}\right) \cup (0; +\infty)$; б) см. рис.13; в) $\{0\} \cup [9; +\infty)$.

2. $\left[\log_{3/5} 2; +\infty\right)$. **3.** 0; $\pi/2$. **4.** 16. **5.** 12,5.

Вариант 2

1. а) $(-\infty; 0) \cup (2n; +\infty)$; б) см. рис.14; в) $\{0\} \cup [5, +\infty)$.

2. $(-\infty; 3/2]$. **3.** $\pi/2$, $2\pi/3$. **4.** 51. **5.** 4,5.

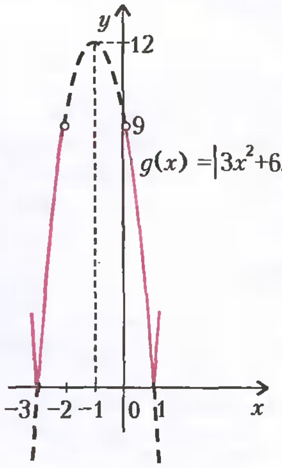


Рис. 13

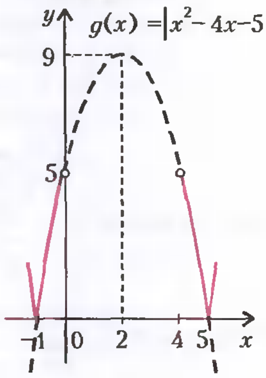


Рис. 14

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 6. **2.** −4. **3.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup(3;4]$. **4.** $-\frac{5}{9}$.

5. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\arcsin\frac{5-\sqrt{33}}{2\sqrt{2}}+\pi n-\frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$.

6. 2 : 35.

Вариант 2

1. −6. **2.** 3. **3.** $\{3\}\cup\left[\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$. **4.** $\frac{3}{4}$.

5. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\arcsin\frac{-3+\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}+\pi n+\frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$.

6. 1 : 9.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_{ср}=8/3$ м/с $\approx 2,7$ м/с. **2.** $\Delta W=1,1\cdot10^{-4}$ Дж.
3. $N_2=1100$. **4.** $A=83$ Дж. **5.** $T=0,314$ с.
6. $I=5$ А.

Вариант 2

1. $T_н=400$ К. **2.** $W_э/W_м=3$. **3.** $\mu\approx0,23$.
4. $r=250$ Ом. **5.** $F_н=4mg$.
6. $p=3,9\cdot10^{-8}$ Дж/(м/с).

Российский государственный университет нефти и газа им.И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. −2. **2.** −5. **3.** 8. **4.** −3. **5.** 0. **6.** 2,25. **7.** 0,3. **8.** 6.

9. 4,05. *Указание.* Пусть точка M имеет абсциссу $p>0$. Тогда угловой коэффициент касательной к кривой $k=\frac{a}{2\sqrt{p}}$ и уравнение параллельной прямой $y=\frac{a}{2\sqrt{p}}x+b$. Абсциссы точек пересечения этой прямой с графиком – корни уравнения $a\sqrt{x}=\frac{a}{2\sqrt{p}}x+b$. Далее воспользуйтесь теоремой Виета.

10. 11.

11. 1. Пусть M – центр второй окружности (рис. 15), $x=MK=MB$ – ее радиус, $\angle BOA=\alpha$. Тогда $OM=6-x$ и $\sin\alpha=x/(6-x)$, поэтому площадь прямоугольника

$$S=0,5AC\cdot BD\sin\alpha=72x/(6-x).$$

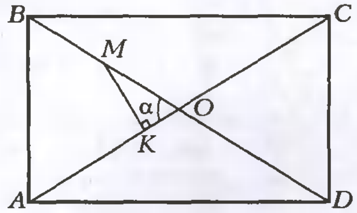


Рис. 15

12. 11. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды S и середины A, B параллельных сторон основания (рис.16). Тогда O – центр основания пирамиды, P – центр вписанного шара, $r=PO=PM$ – радиус вписанного шара, $\angle SBP=\angle OBP=\beta/2$, $\cos\beta=0,2$, MN – диаметр сечения шара плоскостью, PK проведено перпендикулярно MN, так что $\rho=MK=KN$ – радиус этого сечения. Пусть $\angle OMB=\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=OB/(2r)$, $OB=r\operatorname{ctg}(\beta/2)$ и $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\beta}{4(1-\cos\beta)}=\frac{3}{8}$. Из ΔPMK получаем $r^2=\frac{\rho^2}{\cos^2\alpha}$, или $r^2=\frac{11}{8}\rho^2$, поэтому площадь поверхности вписанного шара есть $S=4\pi r^2=\frac{11}{2}\pi\rho^2=11$.

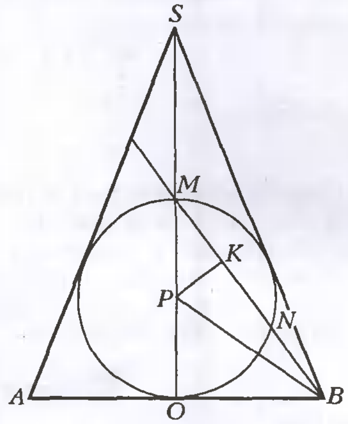


Рис. 16

Вариант 2

1. 3. **2.** 3. **3.** 9,4. **4.** −3. **5.** 9. **6.** 1. **7.** 2. **8.** −4.

9. −0,2. *Указание.* Пусть p – абсцисса точки M, q – абсцисса точки N. Составим уравнения касательных в этих точках: $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Из системы уравнений $k_1=k_2$, $b_1=b_2$ находим p.

10. 34.

11. 105. Пусть M – середина стороны ромба AB (рис.17), K – середина MD. Проведем $MN\perp AB$ и $KN\perp MD$. Тогда N – центр искомой окружности, а $\rho=MN$ – ее радиус. Если $\angle BAD=\alpha$, $\angle NMK=\beta$, то $\angle AMD=90^\circ-\beta$, а сторона ромба $AB=\frac{2r}{\sin\alpha}$. Используя в ΔAMD сначала теорему косинусов, а затем теорему синусов, получаем $MK=\frac{r\sqrt{1,25-\cos\alpha}}{\sin\alpha}$, $\cos\beta=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1,25-\cos\alpha}}$. Поэтому $\rho=\frac{MK}{\cos\beta}=\frac{r(1,25-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$.

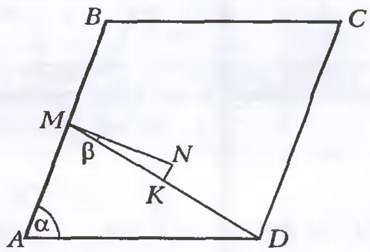


Рис. 17

12. 0,9. На рисунке 18 построено осевое сечение конуса плоскостью, перпендикулярной проведенной. Здесь BD – высота конуса, O – центр вписанного шара, $OD=ON=r$ – радиус вписанного шара, BK – прямая пересечения двух плоскостей, OT проведено перпендикулярно MN, $MT=TN=\rho$ – радиус сечения вписанного шара плоскостью. Пусть $\angle BAD=$

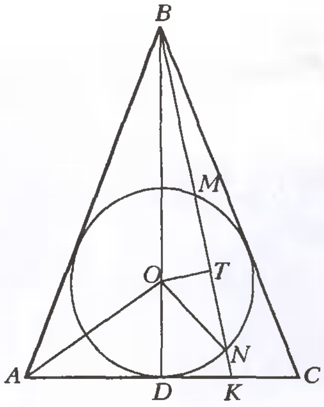


Рис. 18

$= \angle BCD = \alpha$, нам нужно найти $\cos\alpha$. При этом $\angle BKD = \varphi$, тогда $\angle BOT = \varphi$ и $OT = BO\cos\varphi$. Но AO – биссектриса в треугольнике ABD, поэтому $\frac{r}{BO} = \frac{AD}{AB} = \cos\alpha$, и $BO = \frac{r}{\cos\alpha}$. Отсюда $OT = \frac{r\cos\varphi}{\cos\alpha}$, и из треугольника OTN

$\rho^2 = r^2 - OT^2 = r^2\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}\right)$.

Теперь легко находится отношение площади сечения к площади поверхности шара:

$$\left(\pi\rho^2\right):\left(4\pi r^2\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}\right).$$

По условию это отношение равно 0,16, поэтому $\cos\alpha = \frac{\cos\varphi}{0{,}6} = 0{,}9$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = 4$ м/с. **2.** $\Delta A = 15$ Дж. **3.** $V = 240$ см^3.
4. $H = 50$ м. **5.** $\Delta\varphi = 24$ В. **6.** $I = 12$ А.
7. $n = 4$. **8.** $\Gamma = 9$.

9. Поскольку в условии указано, что жесткость цилиндра велика, то при раскручивании он не деформируется, т.е. длина цепочки и ее натяжение T не меняются. На маленький элемент цепочки массой $\Delta m = m\Delta\alpha/(2\pi)$, где $\Delta\alpha$ – угол, под которым этот элемент виден из центра окружности, действуют равнодействующая сил натяжения, равная $T\Delta\alpha$, сила нормальной реакции цилиндра N, сила тяжести Δmg и сила трения $F_{тр}$. Второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления имеет вид

$$T\Delta\alpha - N = \Delta m\omega^2 R, \quad F_{тр} - \Delta mg = 0.$$

В момент начала проскальзывания

$$F_{тр} = \mu N.$$

Окончательно получаем

$$T = \frac{m}{2\pi}\left(\frac{g}{\mu} + \omega^2 R\right) = 3 \text{ Н}.$$

10. $H = 125$ см. **11.** $H = 20$ км.

12. В подвижной стороне контура возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = Bvl = Bvx\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

где $v = (x_2 - x_1)/t$. Сопротивление контура равно

$$R = \rho_l\left(x + x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{x}{\cos\alpha}\right).$$

Ток в контуре не зависит от x:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bv\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\rho_l\left(1 + \mathrm{tg}\,\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)},$$

но тепловая мощность меняется с изменением x. Можно поступить следующим образом. Поскольку полная работа постоянного магнитного поля равна нулю, выделяемое количество теплоты равно работе силы Ампера (с противоположным знаком). Сила Ампера, равная $F_A = IBl = IBx\,\mathrm{tg}\,\alpha$, линейно зависит от x, и ее работу можно вычислить через среднюю силу. Тогда получим

$$Q = |A_A| = \frac{F_{A1} + F_{A2}}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}BI\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\left(x_2^2 - x_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{B^2\mathrm{tg}^2\,\alpha\cdot\left(x_2^2 - x_1^2\right)(x_2 - x_1)}{\rho_l\left(1 + \mathrm{tg}\,\alpha + 1/\cos\alpha\right)t} = 12 \text{ мДж}.$$

Вариант 2

1. $F = 52$ Н. **2.** $v = 440$ см/с. **3.** $\alpha = 30°$.
4. $\Delta m = 100$ г. **5.** $N = 80$ Вт. **6.** $W = 33$ кДж.
7. $\Phi = 6$ мВб. **8.** $d = 30$ см. **9.** $s = 20$ м.

10. При извлечении цилиндра уровень воды в сосуде понизится. Найдем понижение уровня Δh из условия

$$S\Delta h = V_{погр},$$

где $V_{погр}$ – объем погруженной части цилиндра. Запишем условие плавания цилиндра (равенство архимедовой силы и силы тяжести):

$$\rho_в g V_{погр} = \rho g V.$$

Отсюда

$$V_{погр} = \frac{\rho}{\rho_в}S_ц H, \quad h_{погр} = \frac{\rho}{\rho_в}H, \quad \Delta h = \frac{\rho}{\rho_в}\frac{S_ц}{S}H,$$

где H – высота цилиндра. Работа совершается на пути

$$x = h_{погр} - \Delta h = H\frac{\rho}{\rho_в}\left(1 - \frac{S_ц}{S}\right),$$

причем сила тяги линейно возрастает от $F_1 = 0$ до $F_2 = mg = \rho g S_ц H$. Получаем

$$A = \frac{0 + mg}{2}x = \frac{\rho^2 g H^2}{2\rho_в}\left(1 - \frac{S_ц}{S}\right) = 360 \text{ мДж}.$$

11. В тот момент, когда расстояние между частицами достигает максимального значения r, их скорости имеют одинаковую величину u и одинаковое направление (относительная скорость равна нулю). Это состояние системы связано с начальным законами сохранения импульса и энергии:

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2)u,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + k\frac{q^2}{r_0} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + k\frac{q^2}{r}.$$

Отсюда получаем

$$r = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{2v^2}{kq^2}\right)^{-1} = 10 \text{ м}.$$

12. $n = 2$.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\sqrt{a} + 3$. **2.** $a > b$. **3.** $\varnothing$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\pi n/2$, $\pm\pi/9 + \pi n/3$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** $\pm(2; 1)$, $\pm\left(1/\sqrt{2}; 5\sqrt{2}/6\right)$. **7.** $0; \log_3 2 - 2$. **8.** $(3; 2)$. **9.** $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$. **10.** $(-1)^{n+1}\pi/12 + \pi n/2$, $\left(\pi n + (-1)^n\arcsin(4/5)\right)/2$, $n \in \mathbf{Z}$. **11.** 3, 81. **12.** 1/5. **13.** 32. **14.** 6. **15.** 5. **16.** $\left[-\sqrt{12}; 2\right)$. **17.** 7:2. **18.** $25\pi/18$. **19.** 2. **20.** $(-\infty; -2)\cup(-1; 1)$.

Вариант 2

1. $\sqrt{a}$. **2.** 1, 7/3. **3.** –4. **4.** $(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$. **5.** 85. **6.** 192.
7. 1/6. **8.** $(-3;3\sqrt{3})$. **9.** 0. **10.** $y=-(x+4)/2$,
$y=-(x+12)/6$. **11.** $\{0\}\cup(12/7;2)$. **12.** $\pm\pi/3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.
13. $[-2;-1)\cup[2;+\infty)$. **14.** –2. **15.** $[2;3)$.
16. $[-1;-1/2]\cup[1/2;1]$. **17.** $\sqrt{3037}/6$. **18.** $(\sqrt{3};0)$. **19.** 12/25.
20. $(\pm 15/\sqrt{26};\pm 3/\sqrt{26})$.

XXXIV Международная физическая олимпиада

Задача 1

a) $s'+R\theta'=0$; b) $\vec{v}_Q=R\theta'\vec{e}_t=-s'\vec{e}_t$; c) $\vec{v}=-s\theta'\vec{e}_r+s'\vec{e}_t$;

d) $\vec{v}=-s\theta'\vec{e}_r$; e) $a_t=-s\theta'^2$;

f) $U(\theta)=-mg\left(R(1-\cos\theta)+s\sin\theta\right)$;

g) $v=\sqrt{2g\left(R+(L-\pi R/2)\right)}$;

h) $v=\sqrt{\frac{4gR}{3}}\cos\frac{\pi}{16}=1{,}133\sqrt{gR}$;

i) $v=\sqrt{\frac{4gR}{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sin\frac{\pi}{8}=0{,}4334\sqrt{gR}$;

j) $\alpha_\text{к}=\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}\dfrac{M}{m}}$.

Задача 2

a) $T=-p=-\rho uv$; b) $v=-k\xi_0 u\cos k(x-ut)$,
$S=k\xi_0\cos k(x-ut)$, $p=-kY\xi_0\cos k(x-ut)$;

c) $B_1=\pm1$, $B_2=0$; d) $f_1=\frac{u}{2b}=273$ кГц и $f_2=3f_1$, где
$u=\sqrt{Y/\rho}$;

e) $D_1=Y\dfrac{d_p^2}{\cos\frac{kb}{2}}$, $D_2=\varepsilon_T\left(1-Y\dfrac{d_p^2}{\varepsilon_T}\right)$;

f) $C_0=\varepsilon_T\frac{bw}{h}$, $\alpha^2=Y\frac{d_p^2}{\varepsilon_T}=9{,}82\cdot10^{-3}$.

Задача 3

a) $E_{\max}=\dfrac{c^2}{2m_n}\left(m_n^2+m_e^2-\left(m_p+m_\nu\right)^2\right)\approx1{,}29$ МэВ,

$$\frac{v_m}{c}=\frac{\sqrt{\left(m_n^2+m_e^2-M^2\right)^2-4m_n^2m_e^2}}{2m_n^2-\left(m_n^2+m_e^2-M^2\right)}\approx0{,}00127\text{ , где } M=m_p+m_\nu;$$

b) $P=\dfrac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}$.

Московская студенческая олимпиада по физике

1. $s_1=l$, $\Delta s_1=\frac{2l}{\sqrt5}$; $s_2=\frac{l}{2}$, $\Delta s_2=\frac{l}{\sqrt5}$.

2. $\omega=\dfrac{6m\sqrt{2lg}}{ML}$. **3.** $T=2\pi\sqrt{\dfrac{Ml}{mg}}$.

4. $v=u$. **5.** $t=\sqrt{\dfrac{R}{8g}}\ln\dfrac{1{,}36g}{\omega^2R}$.

6. $\sigma=\dfrac{\varepsilon_0\Delta\varphi}{2r\sin\alpha_0\cdot\ln\operatorname{ctg}(\alpha_0/2)}$. **7.** $p_\text{к}=\dfrac{3}{2}p$.

8. $x=\dfrac{R}{2}$. **9.** $I=100I_0$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.info

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Курьер образования
www.courier.com.ru

Vivos Voco!
vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.А.Акатьева, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 4254.

ДискуссиЯ продолжается

В ноябре 2003 года в Нью-Йорке состоялся очередной матч между Человеком и Машиной – четыре партии с полноценным контролем времени (каждая из них могла продолжаться семь часов). В матче сражались сильнейший шахматист на планете Гарри Каспаров и сильнейшая компьютерная программа «Фриц».

На сей раз увлекательная борьба проходила в весьма необычных условиях.

Организатор матча, американская компания «X3D», специализирующаяся в области виртуальных исследований, разработала трехмерную версию «Фриц-8», названную «X3D Фриц» (менеджер программы Фредерик Фридель из Германии). «Фриц» играл на компьютере с четырьмя процессорами, работающими параллельно, что позволяло считать 3,8 миллиона вариантов в секунду.

Одно из научных направлений «X3D» – преобразование двумерных объектов на экране в трехмерное изображение. Человек во время игры надевает специальные черные очки, в которых доска представляется ему как реальная, он видит ее в пространстве парящей перед глазами. Джойстик тоже не действует, «мышкой» можно лишь подправить угол наклона виртуальной доски. Ход надо произносить вслух, компьютер понимает его с помощью программы распознавания голоса. Фигура отделяется от доски, проплывает между полями и перемещается в нужное место. Оператор-человек следит за тем, чтобы машина правильно воспринимала ходы.

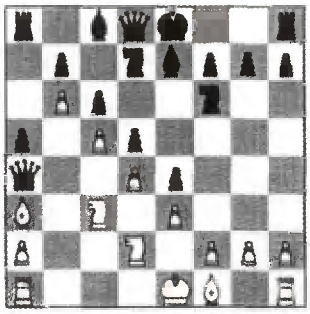
Во время игры Каспаров несколько часов подряд находился в непривычных черных очках, что, конечно, мешало сохранять концентрацию внимания. Можно было отдыхать от очков, но при их снятии фигуры на мониторе исчезали.

Первая партия протекала в головокружительных (а для машины – процессорокружительных) осложнениях и завершилась вничью: робот объявил вечный шах. Вторая закончилась драматически для Каспарова: на 32-м ходу он допустил грубый «зевок». В третьей гроссмейстер даже не дал вздохнуть роботу и отомстил ему за предыдущий прокол. В четвертой партии мир наступил на 27-м ходу, но выключать компьютер можно было гораздо раньше.

Г. Каспаров – «X3D Фриц»
3-я партия
Принятый ферзевый гамбит

1. ♘f3 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘c3 d5 4. d4 c6 5. e3 a6. В этом матче у разработчиков «Фрица» были весьма вольготные условия – им разрешалось прямо по ходу дела (но не во время партии) модифицировать программу, а значит, и менять дебют. Не удовлетворенный началом стартовой партии, компьютер отказывается от ♘bd7 и избирает старинное продолжение с идеей контратаковать ферзевый фланг посредством b7-b5. **6. c5!** Восклицательный знак относится не столько к силе хода, сколько к идее Каспарова: он замыкает пешечные цепи на ферзевом фланге, после чего фигурам будет трудно сойтись в ближнем бою. **6... ♘bd7 7. b4 a5?!** Черные провоцируют дальнейшее продвижение неприятельских пешек. **8. b5 e5 9. ♕a4 ♕c7 10. ♗a3 e4 11. ♘d2 ♗e7.** Это положение возникло много лет назад в партии Решевский–Керес (матч-турнир на первенство мира, Гаага – Москва, 1948). Комментируя ее, Ботвинник осудил последний ход черных и рекомендовал 11...g6 с последующим ♗h6, 0-0 и подготовкой f7-f5.

12. b6 ♕d8.



Рано или поздно черные потеряют пешку «а», и затем белые подготовят прорыв на ферзевом фланге. Но для реализации этого плана требуется не меньше десятка «тихих» ходов. Поскольку компьютер так далеко не считает, он оценивал данную позицию как примерно равную. Отличный пример, иллюстрирующий разные подходы человека и машины. То, что шахматисту часто видно невооруженным взглядом, роботу даже не приходит в голову.

13. h3 0-0 14. ♘b3 ♗d6!? Выглядит красиво – нельзя 15. cd ♘:b6, и ферзь в капкане. Однако в шахматах брать не обязательно. **15. ♖b1.** Спешить некуда: 15. ♘:a5? ♘:b6! 16. cb ♗:a3 17. ♕:a3 ♕:b6 18. ♘c4 dc 19. ♕:a8 ♕b2. **15... ♗e7.** Прогулка слона оказалась напрасной. Черным следовало затеять контригру на королевском фланге, и тут без f7-f5 и при случае f5-f4 не обойтись. Вместо этого «Фриц» топчется на месте. **16. ♘:a5 ♘b8 17. ♗b4 ♕d7.** Немедленное 17... ♘e8 проигрывало из-за 18. ♘:c6! ♖:a4 19. ♘:d8 ♖:b4 20. ♖:b4 ♗:d8 21. ♘:d5. **18. ♖b2 ♕e6.** А вот здесь пора было действовать – 18... ♘e8 19. ♕d1 f5! 20. g3 g5 21. ♘e2 ♘g7. **19. ♕d1 ♘fd7.** Неужели «Фриц» наконец сообразил двинуть вперед пешку «f»? **20. a3 ♕h6 21. ♘b3 ♗h4 22. ♕d2 ♘f6?** Поразительно: несколько ходов подряд машина могла оживить игру посредством f7-f5, но так и не решилась сделать это. **23. ♔d1.** Забавно, что потеря белыми права на рокировку была расценена роботом в его пользу. **23... ♗e6 24. ♔c1 ♖d8 25. ♖c2 ♘bd7 26. ♔b2 ♘f8 27. a4!** Началось... **27... ♘g6 28. a5 ♘e7 29. a6! ba 30. ♘a5.** Белые вернули пешку, но связали электронного монстра по рукам и ногам. **30... ♖db8 31. g3 ♗g5 32. ♗g2 ♕g6 33. ♔a1 ♔h8.** «Фриц» демонстрирует полную беспомощность. **34. ♘a2! ♗d7 35. ♗c3 ♘e8 36. ♘b4 ♔g8 37. ♖b1 ♗c8 38. ♖a2 ♗h6 39. ♗f1 ♕e6 40. ♕d1 ♘f6 41. ♕a4 ♗b7 42. ♘:b7 ♖:b7 43. ♘:a6.** Снова у белых лишняя пешка, но уже при подавляющем позиционном перевесе. **43... ♕d7 44. ♕c2 ♔h8 45. ♖b3!**

Вообще, машина играет до мата, но здесь операторам «Фрица» стало стыдно за свое детище, и они выбросили белый флаг, избежав позорного разгрома. Примечательно, что робот в этот момент еще не понимал всей степени своего шахматного падения и оценивал позицию как равную.

Какие можно сделать выводы? Давно ясно, что сильнейшие роботы на равных сражаются с сильнейшими гроссмейстерами, чемпионами мира – после пяти матчей, сыгранных с классическим контролем, паритет сохраняется. В 1996 году Каспаров обыграл «Дип Блу», в 1997-м «Дип Блу» взял у него реванш. Мирно завершился матч Крамника с «Фрицем» в конце 2002-го, а затем – и обе встречи Каспарова в 2003-м: с «Юниором» и с тем же «Фрицем».

Увлекательная дискуссия продолжается.

Е.Гик

Индекс 70465

На словенской банкноте достоинством в 50 толариев изображен словенский математик барон ЮРИЙ ВЕГА (1756–1802). Одна из его математических работ связана с вычислением числа «пи».

Этой же проблеме были посвящены труды китайского математика ЦЗУ ЧУНЧЖИ (V в.). Его портрет представлен на китайской серебряной монете достоинством в 5 юаней. Здесь же показана его легендарная повозка, на которой размещалась символическая фигурка, всегда указывающая направление на юг.

(Подробнее о Юрии Веге – внутри журнала.)